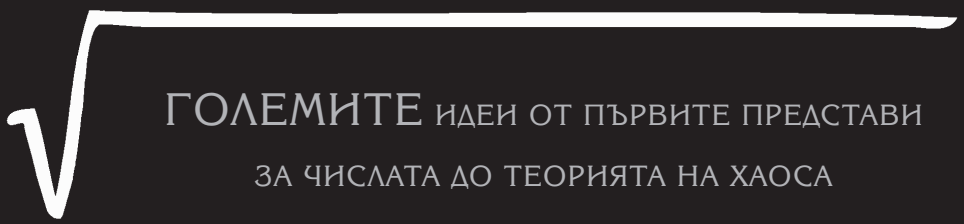
OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

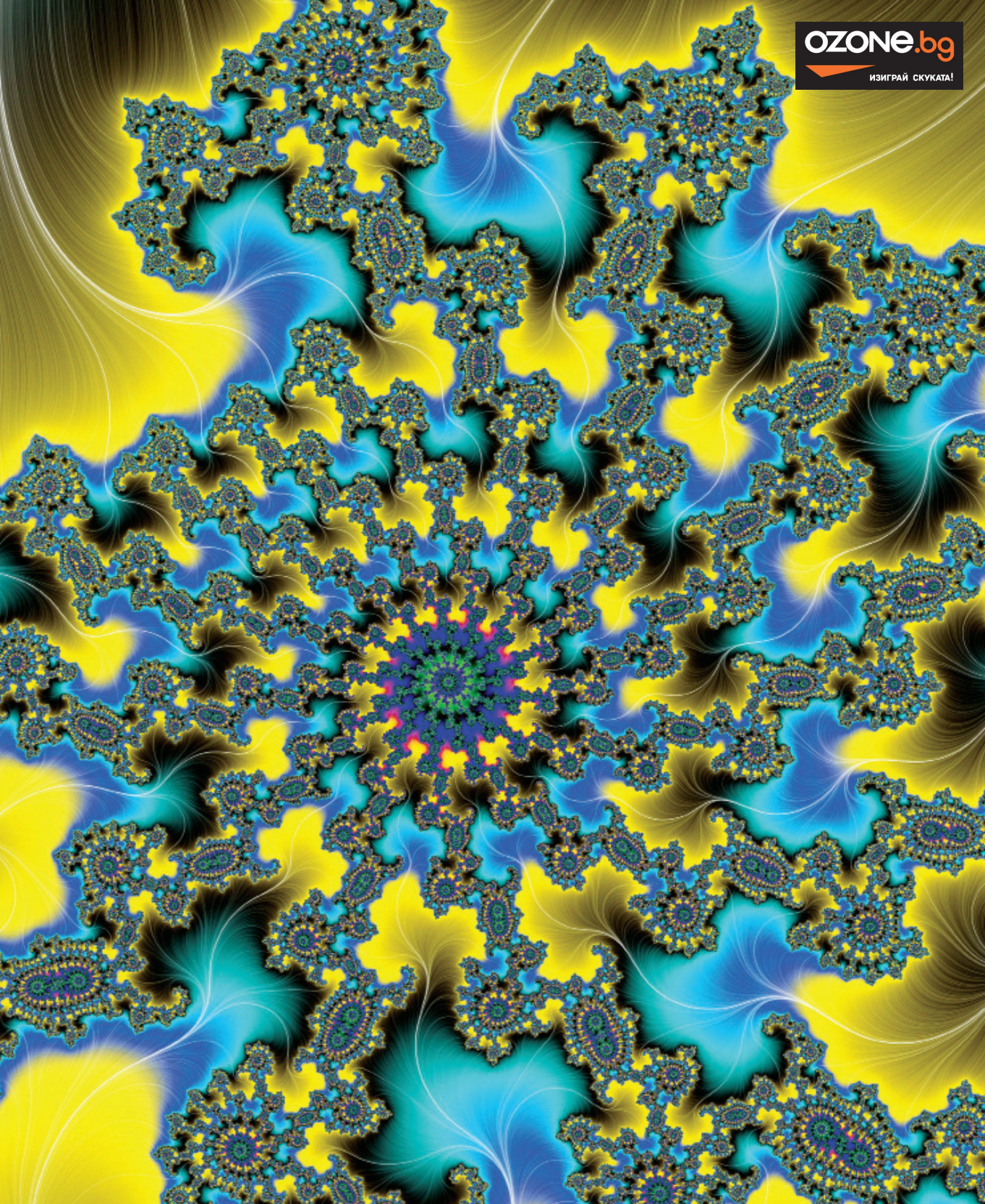
НЕОБИКНОВЕНАТА ИСТОРИЯ НА МАТЕМАТИКАТА



ГОЛЕМИТЕ ИДЕИ ОТ ПЪРВИТЕ ПРЕДСТАВИ ЗА ЧИСЛАТА ДО ТЕОРИЯТА НА ХАОСА

ДЖОЪЛ ЛЕВИ

КНИГОМАНИЯ


OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

УВОД

Когато Карл Фридрих Гаус е на седем години, учителят дава на класа една видимо трудна задача: да съберат числата от 1 до 100. Каква е изненадата на достолепния преподавател, когато само няколко секунди по-късно малкият Гаус вдига ръка и дава верния отговор. Дали това дете не е имало някакви отклонения за сметка на уникалните си способности да смята бързо и точно като машина?

Без съмнение Гаус, наричан Princeps mathematicorum (Принц на математиците) и „Най-великия математик след Античността“, е математически гений, но той успява да реши задачата на своя учител не заради необикновено бързия си в смятането ум, а заради гениалните идеи, които са го озарявали. В случая, вместо да решава задачата по досадния и труден начин: 1 + 2 + 3 + 4... + 100, той се сеща, че 1 + 100 = 101, 2 + 99 = 101, 3 + 98 = 101 и т.н., т.е. сборът на числата от 1 до 100 е равен на сбора на 50 двойки числа, всяка от които е равна на 101. Пресмятането на произведението 50 . 101 не е представлявало никакъв проблем за детето и то веднага дава точния отговор – 5050. Вие също можете да използвате този метод, за да направите впечатление на приятелите си, защото сборът от всеки ред от последователни числа (n) е равен на n/2, умножен по сбора на първото и последното число от реда. Така например сборът на числата от 1 до 20 е равен на 20/2 .(1 + 20) = 210.

ТРИК ИЛИ НАСЛАДА ЗА УМА?

Дали това не е било само един хитър номер? Всъщност откритието, което Гаус направил, хвърлило светлина към един свят с фундаментално значение. В него всички числа се подчиняват на съгласувани помежду си взаимоотношения, на невидими закони, които могат да бъдат опознати единствено със силата на човешкия разум. Това е светът на математиката, която Гаус по-късно ще нарече „царица на природните науки“. Много от най-светлите умове след него ще се съгласят с това твърдение. Дали разглеждат света от религиозна или природонаучна гледна точка, натурфилософите винаги са виждали математиката като най-чистата и задълбочена форма на истина и красота във Вселената. Древните гърци поставяли математиката в основата на света. Математикът магьосник от елизабетинската епоха в Англия Джон Дий нарича математиката най-съвършен инструмент на Твореца, с помощта на който Той „създал всяка земна твар... в абсолютно точен ред и количество, извеждайки я от небитието и придавайки ѝ нейната формална същност и състояние.“ Италианският математик и пионер на техническите науки Галилео Галилей настоява, че „книгата [на Вселената] не може да бъде прочетена, ако човек първо не научи езика... на който тя е написана. А тя е написана на езика на математиката...“

СТРАХЪТ ОТ МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ ЗАДАЧИ

Съвременната математика включва над 30 различни научни области – като се започне от геометрията и алгебрата и се стигне до езотеричните научни дялове като топологията (математика на непрекъснатостта, наричана понякога геометрия на гумения лист) и комбинаториката (раздел от математиката, занимаващ се с проблеми на селекцията, структурирането и реда). Днес математиката е станала прекалено специализирана и прекалено комплексна, като огромни нейни дялове могат да бъдат изследвани само от сериозни специалисти. В действителност преобладаващото мнозинство от хората се смятат за пълни профани по математика, като са забравили почти всичко, което са учили в училище. Една малка част от тях даже страдат от така наречената математикофобия – изпитват непреодолим ужас от математиката. Истината обаче е, че числата са навсякъде около нас и че всеки човек в ежедневието си (независимо дали го осъзнава, или не) е малко или много математик: постоянно сравнява количества и величини, ъгли и вектори.

Всеки път, когато преценявате коя поничка е по-голяма, когато делите пица на равни парчета, броите си рестото или

Силата и дълбоката същност на математиката разкриват своята екзотична красота във формите, създадени с помощта на фракталните функции.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

Процесът срещу Галилей е илюстрация за силата на математиката да променя фундаменталните схващания за Вселената.

дори погледнете часовника, вие влизате във функциите си на „всекидневен математик", за когото е написана и настоящата „Необикновена история на математиката".

НАЙ-ГОЛЯМОТО ШОУ НА ЗЕМЯТА

В тази книга е разказана удивителната история на математиката още от нейното зараждане до времето на най-поразителните съвременни открития на тази наука. Тя проследява еволюцията на математическото познание от първите представи за числата и смятането в праисторическо време и преминава през постиженията на древните вавилонци, египтяни и гърци, през великите ислямски и европейски учени на Средновековието и постиженията на Ренесанса и Научната революция, за да ни доведе до великаните на математическата мисъл през XVIII и XIX в. и до новите светове в тази научна област, разкрити от изследователите на XX в. Докато разказва тази необикновена история, книгата обяснява на лек и достъпен език, без излишно обременяване с терминология, най-важните схващания на аритметиката, геометрията и алгебрата, тригонометрията и диференциалното смятане. В нея ще намерите описани революционните идеи и невероятните открития на множество необикновени хора, като Питагор и Нютон, Фибоначи и Ферма. Няма да бъдат подминати и най-големите тайни на математиката, като последната теорема на Ферма и теориите на хаоса и на фракталите.

ПЛЕНИТЕЛНА УБЕДИТЕЛНОСТ

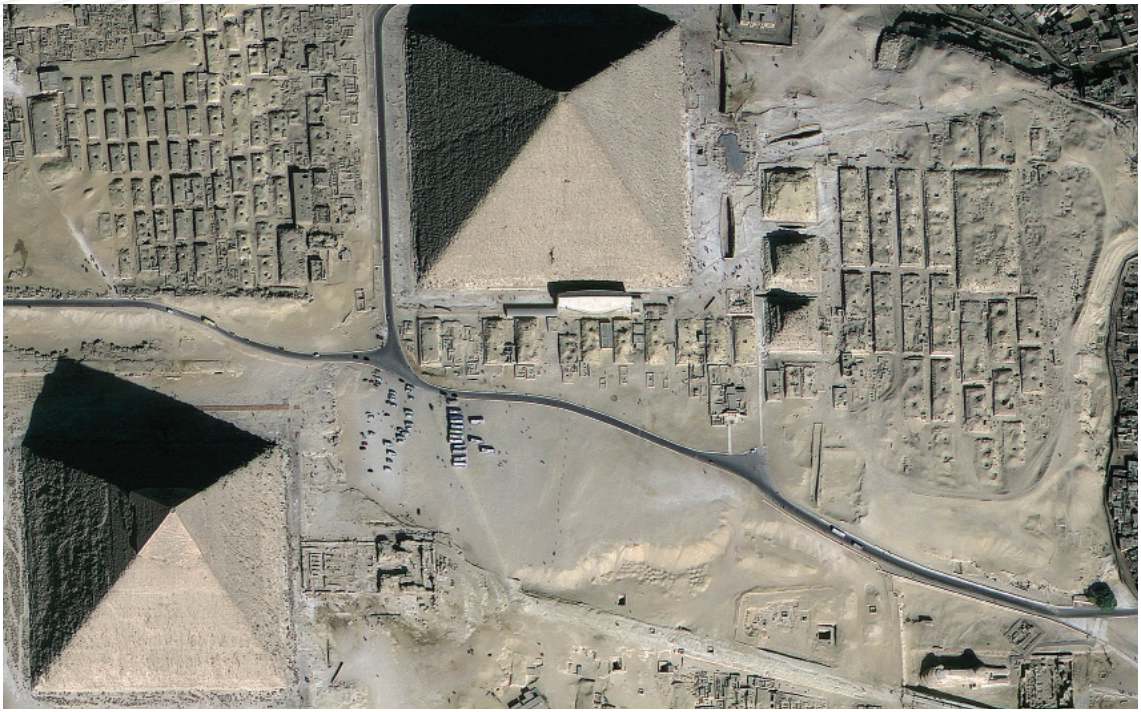
За да разберете написаното в тази книга, няма да са ви необходими кой знае какви дарби или познания в областта на математиката. Всичко, от което се нуждаете, е да умеете да се справяте с елементарната аритметика и да притежавате нормален здрав разум. Успоредно с разказа за историческото развитие на математиката се въвеждат и обясняват в отделни рубрики важните нови схващания в тази област. Така ще получите по-широка обща култура и по-задълбочена представа за ключови неща, свързани с простите числа, геометрията, окръжността и графиката. Разглеждането на по-сложната материя (като тригонометрията или диференциалното смятане) става чрез надграждане на разказаното за основите на математиката. И тук обаче сме гледали да не прекаляваме със специфичния математически жаргон и терминология.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

Когато стигнете до края на това прелюбопитно пътешествие, вие ще различавате синус от косинус и квадратно от кубично уравнение; ще имате бегла представа за границите на безкрайността и ще знаете как да изградите платформа за поредния етаж от вашата монументална пирамида. По пътя си ще се запознаете със смъртността при древните хора, ще срещнете един гол човек, излязъл без хавлия от банята, и ще видите отровни ябълки и пукнатини в пространствено-времевия континуум. Да се надяваме, че междувременно ще сте се съгласили с думите на Джон Дий (1527 – 1608) – бележит математик, астроном, астролог, окултист и съветник на Елизабет I, за когото математиката притежава една наистина „пленителна убедителност".

Някои от неолитните каменни кръгове разкриват наченки на математическо мислене у праисторическите хора.

На тази въздушна снимка се разкрива геометричното съвършенство на египетските пирамиди.



OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

МАТЕМАТИКАТА ПРЕДИ КЛАСИЧЕСКАТА ЕПОХА

Математиката е свят на абстрактното, на „чистите" числа, на идеалните форми, на универсалните теореми и алгебрични формули, но нейните корени са здраво свързани с реалния свят на хората и животните, на камъните и почвата. Числата за пръв път са били измислени във връзка с конкретни предмети и през по-голямата част от човешката история математиката се занимава предимно с конкретни неща. Праисторическите хора и първите цивилизации създават математиката като средство за боравене с реални предмети и количества. Затова математиката от предкласическата епоха се занимава с неща като броене на животни, измерване на ниви, претегляне на зърнени храни и строителство на сгради. Така древните египтяни, вавилонци, индийци и други предкласически народи поставят основите на аритметиката, геометрията, алгебрата и теорията на числата.

Древноегипетски стенопис от 1400 г. пр. н. е., представящ писар, който измерва площта на нива с жито. За предкласическите народи математиката има предимно практическо приложение.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

ПРЕДКЛАСИЧЕСКАТА МАТЕМАТИКА

Математиката често е определяна като най-чистото проявление на способността на човешкия ум да мисли абстрактно, което е квинтесенцията на човешкия разум изобщо. На практика обаче няколко вида животни – от врабците до маймуните – притежават способността да отчитат разликите в размера и количеството и дори да преброят малък брой предмети (вж. рубриката „Маймуни математици").

ХАРМОНИЧНИТЕ КАМЕННИ БРАДВИ

Предполага се, че нашите далечни праисторически прадеди са притежавали, подобно на други животни, умението да сравняват предметите по размер и количество. Британският археолог Джон Гоулит, изследващ епохата на палеолита, е доказал, че хоминидите, живели преди 700 000 години, много преди появата на съвременния човешки вид (*Homo sapiens*), са проявявали забележително усещане за пропорции при проектирането и изработването на ръчни каменни брадви и други сечива. Стотиците образци на такива брадви, открити в Киломбе (Кения), показват едно и също съотношение между тяхната ширина и височина. Така живелите там хоминиди, независимо дали изработвали малки или големи каменни брадви, винаги „имали на ум" оптималното съотношение на техните размери. Изказано е дори предположението, че пропорцията, която те спазвали, съответства на любимото на древните гърци златно сечение (вж. стр. 120).

ОТ КОНКРЕТНОТО КЪМ ОБЩОТО

В някакъв момент тази способност на далечните ни прадеди да определят такива пропорции, еволюирала в едно по-сложно умение – умението да броят, което представлява най-ранната форма на математическо мислене. Какво имам предвид, под думата „броене". В онези ранни времена броенето вероятно е било по-скоро отчитане на качествените изменения, а не на количествените – отбелязвани били повтарящи се конкретни случаи на едно и също нещо, вместо да бъде определен техния брой. Тази разлика между използването на квалитативни (качествени) вместо квантитативни (количествени) термини при отбелязване на едно и също нещо е много важна, защото количествените понятия са проява на по-висша, абстрактна степен на мислене. Голямата крачка, направена от праисторическите човекоподобни същества, от понятието „три крави" към понятие за числото три представлява истинска революция в развитието на тяхното мислене. Някои следи от тази ранна, „квалитативна" фаза в мисленето на човека, са се запазили в съвременните езици и култури. Така например в стария език на жителите на островите Фиджи съществуват термини, обозначаващи десет предмета от един и същи вид: „бола" означава 10 лодки, а „коро" – 10 кокосови ореха.

Дали еднаквите пропорции на каменните брадви от старокаменната епоха са проява на математическо мислене?

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

БРОЕНЕ С ПОМОЩТА НА ЧАСТИ ОТ ТЯЛОТО

Номадските народи и племената, които днес се изхранват чрез събирателство, могат да ни дадат известна представа за това, какво е представлявало броенето в праисторическо време.

Почти сигурно е обаче, че не е вярно твърдението, според което нашите далечни предци различавали само „едно", „две" и „много". Макар специални думи за по-големите числа да липсват (в някои случаи просто защото това не е необходимо), хората от тези култури могат да формулират доста големи числа.

Най-простата форма на броене с помощта на части от тялото, която вероятно е възникнала първа, е броенето на пръсти. Тя позволява поради естествени причини да се брои до 5 или 10 (вж. стр. 40). Този вид смятане, с помощта на части на човешкото тяло, позволява броене до 20 и повече. Така например племето фасу от Нова Гвинея използва пръстите за числата от 1 до 5, дланта за 6, китката за 7, долната част на ръката за 8 и така нагоре до носа, който е символ на числото 18. Номадите еленовъди от Сибир – юкагирите, изразяват броя на елените в стадо с 94 животни по следния начин: „трима души върху един, плюс още половин човек и още едно чело, две очи и един нос".

ХОРАТА ИЗНАМИРАТ РАБОША

Когато частите на тялото се използват при броене, те се превръщат във външно помощно средство на паметта, на-

МАЙМУНИ МАТЕМАТИЦИ

Поредица находчиви научни експерименти показват, че някои от животните правят разлика между предметите по размер и количество, а дори биха могли и да броят. Новозеландски учени поставяли голямо количество червеи в специална дупка и след това позволявали на червеношийките да ги измъкнат оттам. Всеки път, когато част от червеите тайно били изваждани през дъното на дупката, птиците продължавали да обследват дупката, защото очевидно ги били „преброили" вече и търсели липсващите. Пак по експериментален път е доказано, че малките пиленца на кокошката правят разлика между група от три и група от две фигури. Може би най-изненадващо добре се представили маймуните резус, които изпреварили учениците колежани при следния тест: от група точки бил изваден определен брой от тях, а участниците в експеримента трябвало да определят коя от двете им показани групи от точки отговаря на разликата от гореописаното действие изваждане. Оказва се, че дори нищожно малката рибка гамбузия може да бъде приучена да различава многоъгълниците по броя на техните страни.

Могат ли тези животни да броят? Способни ли са на абстрактно мислене? И къде трябва да бъде прокарана разграничителната линия между човешкото и животинското абстрактно мислене? Според учените тази способност на животните за елементарно пресмятане е важна еволюционна придобивка, която им позволява да определят коя от две групи фигури предлага по-голяма сигурност с оглед на количеството, както и коя от две групи представлява по-голяма конкуренция, когато става дума за усвояване на ресурсите на чужда територия.

Маймуните резус понякога са по-добри по математика от колежаните.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

Образци на средновековни рабоши, оцелели до днес.

ричано от специалистите изкуствена памет. Най-старото свидетелство за математическите способности на нашите праисторически роднини и същевременно първият вид помощно средство на паметта е рабошът.

Най-старият открит рабош е т.нар. кост от Лебомбо. Тя представлява фибула (дългата кост, свързваща коляното с глезена) от бабун с поредица от 29 нареза по нея. Костта е открита в пещера в планината Лебомбо, намираща се между Южноафриканската република и Свазиленд, а нарезите по нея са направени преди около 37 000 години.

По принцип рабошът представлява дървена пръчка, рог или животинска кост, по която всеки нарез отговаря на един брой от нещо, което е подложено на преброяване. Вместо да се помни даденият брой, което е свързано с краткосрочната памет, рабошът осигурява външно депо за запазване на нещата, които трябва да бъдат запомнени. Рабошът е толкова просто, но и толкова полезно нещо, че продължава да се използва и днес. Той постепенно еволюира и в нещо като парично средство. Когато рабошът бъде разсечен по дължина на две, заради естеството на дървото той с точно съвпадащи половини. Тогава всяка една от двете страни по дадена сделка взима една от частите, а сделката бива приключена, когато съответната размяна се извърши и съединяването на двете части на рабоша засвидетелства това. Тъй като и двете части от пръчката носят едни и същи нарези, изобразените по този начин количества, обект на сделката, не могат да бъдат подправени или фалшифицирани. През Средновековието в Англия рабошите били използвани като официални счетоводни документи за приходите, дължими на правителството, поради което се съхранявали в Държавната хазна. Когато тази английска институция престава да съществува през 1826 г., от нея остават две волски коли с рабоши, наредени в Уестминстърския дворец, където заседавал Британският парламент. През 1834 г. домакинът на двореца решава да се освободи от тях, като ги изгори в дворцовата фурна, но силата на пламъка от сухото дърво е била толкова голяма, че изгаря целият дворец. След това на негово място е построена днешната сграда на Парламента в Лондон.

КИПУ

Като външно помощно средство за запаметяване древните използвали възлите по разноцветни върви или дребни камъчета и раковини, струпани на купчинки или накачени по дървени стълбове. Те обаче са по-нетрайни и затова единствените оцелели до днес свидетелства за математиката на палеолита са рабошите или техните подобия. Свидетелство за това колко сложни могат да бъдат едни допотопни на пръв поглед външни помощни средства за запаметяване като възли по връв, са прочутите кипу, създадени от инките. Те представляват разноцветни конци от вълна на лама или алпака с множество навързани по тях възли и нанизани на общ шнур или въже. Възлите по отделните нишки представят различни числа в зависимост от броя на пресуканията на конеца; по-големите суми пък се изразяват посредством групи от възли. Предполага се, че цветът на конеца е определял вида на нещата, които са подложени на съответното преброяване. Без да притежават писменост и бройна система, счетоводителите на инките – *кипукамайок* (пазители на кипу), са били в състояние да съхраняват информация за данъците, таксите, приходите, преброяванията, календара, обработваемите площи и други важни за чиновничеството неща, при това в една огромна и силна империя.

КОСТТА ОТ ИШАНГО

Елементарните средства за външно запаметяване помагат да се съхраняват сметки, без да се извършва същинско пресмя-

В това кипу, изработено в стила на инките, различните категории и количества са предадени посредством различни дължини на конеца, различни възли, цветове и т.н.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

тане. Ако с една раковина обозначите едно от вашите прасета, ще ви е нужно само да пазите купчинката с раковини и да помните, че всяка от тях е равна на едно прасе. Щом обаче числата започнат да бъдат изразявани като поредица от специфични знаци или като части на тялото от пръстите до носа, до тяхното абстрактно представяне остава да бъде направена само една стъпка. Поредица от четири специфични знака тогава ще означава четири прасета, четири кокосови ореха, четири дни или просто числото четири.

Може би най-древният артефакт, показващ следи от по-абстрактно математическо мислене, е т.нар. кост от Ишанго. Тя е намерена в Централна Африка, на границата на Уганда. Датира от преди 25 000 години и на пръв поглед представлява рабош. Нарезите по костта обаче са групирани по много интересен и специфичен начин. Те са в два реда и всеки от тях наброява 60 знака. Във втория ред обаче нарезите са групирани по много интересен начин – в четири групи от съответно 19, 17, 13 и 11 знака. Въпросните четири числа фактически представляват простите числа в интервала между 10 и 20 (вж. стр. 62). Дали притежателят на тази кост е знаел за простите числа? Според американския археолог Алекзандър Маршак костта от Ишанго представлява лунен календар за шест месеца, като нарезите обозначават фазите на Луната. По този начин артефактът може да се смята за най-ранния пример за приложение на математически знания в отброяването на времето. Според други учени костта била използвана от жена, която си отбелязвала на нея своя менструален цикъл.

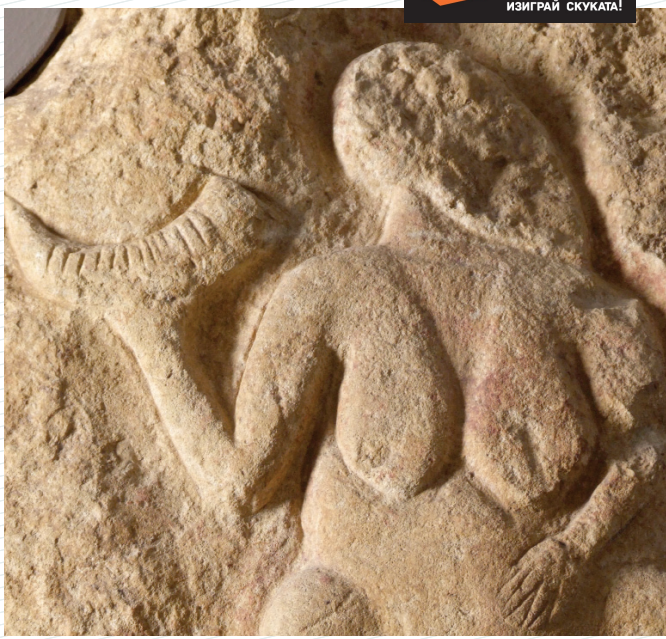
Хипотезите на Маршак вдъхновяват унгарския палеоархеолог Ласло Вертеш към подобна интерпретация на друг древен артефакт – предметът от Бодрогкерестур. Според учения това е лунен календар и в същото време изображение на утроба. Предметът представлява парче варовик, оформено като раковина и датиращо от преди 27 000 години – по-старо дори от костта от Ишанго. Парченцето обаче има диаметър от едва 52 милиметра, а нарезите по повърхността му са толкова дребни, че предположението на Вертеш за използването му като календар не изглежда много правдоподобно.

КУМУЛАТИВНОТО БРОЕНЕ

След обикновеното броене идва елементарната аритметика. Някои от примитивните системи за броене се основават на просто събиране и изваждане, което се наблюдава при много от племената на австралийските аборигени.

Племето гумулгал например използва следната система:

1 = *урапон*
2 = *укасар*
3 = *урапон укасар*
4 = *укасар укасар*
5 = *укасар укасар урапон*



Нарезите по предмета в ръката на тази граветска (от късния палеолит – бел. прев.) Венера може би са от математическо естество.

Системата на племето камиларои изглежда така:

1 = *мал*
2 = *булан*
3 = *гулиба*
4 = *булан булан*
5 = *булан гулиба*
6 = *гулиба гулиба*

При тези системи по-големите числа се получават от групиране на по-малки; така шестицата при племето камиларои е фактически „три плюс три“. Основата на подобни системи е ниска – при гумулгал е 2, а при камиларои – 3. При тези случаи най-големите цифри са съответно две и три (вж. „Обяснение на базите“ на стр. 40).

Използването на пръстите на ръцете и краката като основа при броене води съответно до въвеждането на бази 5, 10 и 20, наричани петична, десетична и двадесетична. Броенето с използване на бази 5 и 10 се нарича петично-десетична система, докато при използване съответно на бази 5 и 20 имаме петично-двадесетична система. Чукчите, отглеждащи стада елени в Североизточен Сибир, използват именно такава петично-двадесетична система, когато броят своите стада: „ръка“ при тях е равна на 5 (броят на пръстите

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

на една ръка), „човек“ е 20 (т.е. броят на пръстите на ръцете и краката на един човек). Числото 100 те биха формулирали като „пет човека“.

При подобни системи по-големите числа често се изразяват като разлика от по-големи кръгли числа – например 17 може да бъде изразено като 20 без 3. През 1913 г. американският антрополог У. Ч. Ийлс анализира 307 системи за броене при северноамериканските индианци и установява, че 146 от тях са десетични, а 106 – различни комбинации между петична, десетична и/или двадесетична система.

ГЕОМЕТРИЧНАТА УКРАСА И ПЪРВИТЕ МОДЕЛИ НА СЪЗВЕЗДИЯТА ПО НЕБЕТО

Броенето не е единствената проява на математическо мислене в праисторическо време. Изкуствата и занаятите на тогавашните хора също са съхранили някои от техните математически схващания. Геометричните мотиви по керамичните съдове и при тъканите, рогозките и плетените кошници се характеризират със сходство на размера и формата на елементите, със симетрия и с ритмична повторяемост. Наличието на триъгълни мотиви в неолитната керамика от райони, така отдалечени един от друг, като Преддинастичен Египет (ок. 4000 – 3500 г. пр. н. е.) и централноевропейските наколни жилища от халщатския период (ок. 1000 – 500 г. пр. н. е.) илюстрират неимоверно широкото разпространение на геометричната украса.

Наченките на измерването (и на измерването на земята в частност) също се коренят в праисторическо време (и често се основават на размера на различни части от човешкото тяло), както и в способността за начертаване на прави линии и определяне на прави ъгли. Измерването на земята, броенето и другите математически умения на древните вървят ръка за ръка с развитието на астрономията и отчитането на времето. Предполагаемият лунен календар, изобразен на костта от Ишанго, не е единственият подобен артефакт от старокаменната епоха. Множество предмети, принадлежащи на граветската култура (ок. 28 000 – 23 000 г. пр. н. е.), се смятат за вероятни лунни календари и карти на звездното небе. Ако тези тълкувания на учените се окажат верни, това ще представлява доказателство, че древните жители на Земята са наблюдавали и системно са записвали явленията по небето; отбелязвали са и са измервали времето, както и движението на небесните тела. Тази праисторическа астрономия е дала своите богати плодове през бронзовата епоха, когато са били построени сложните монументални каменни комплекси, предназначени за измерване на небесни явления и функциониращи като обсерватории (вж. стр. 46).

Съзвездието Орион често е било обект на изследване от праисторическите астрономи.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

ДА ОСТАВИШ ЗНАК ИЛИ КАК ДА БЪДАТ ЗАПИСВАНИ ЧИСЛАТА

С развитието на все по-сложни системи за броене и създаването на различни средства за изкуствено запаметяване на количествените измервания се създават условия за изнамирането на цифрите.

Първите цифри, създадени от древните култури (от Египет до Китай), съвсем приличат на рабоша – единични, двойни или тройни резки или черти. Днешната цифра 1 също представлява такъв вертикален знак от добрия стар рабош; древните египтяни също го използвали за обозначаване на единица, докато древните индийци изписвали чертичката хоризонтално. Записването на по-големи числа става посредством един от следните четири начина: групиране, мултиплициране, с помощта на код и чрез позиционирane.

ЗАПИСВАНЕ НА ЧИСЛА ЧРЕЗ ГРУПИРАНЕ

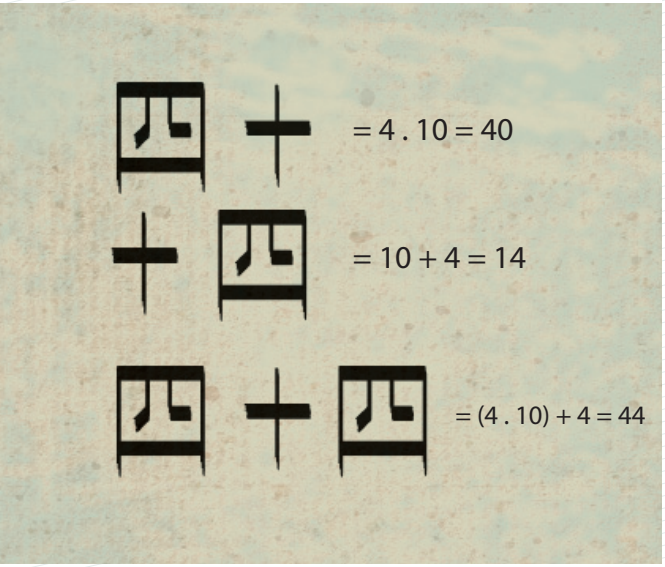
Групирането представлява най-елементарната система за записване на числа – по-големите просто включват по-голям брой рабошови чертици, подобно на римското число 4, записвано като IIII. Установено е, че групата от четири е най-големият брой предмети, които човек може да възприеме като точно количество, без да ги преброи. С други думи, като ви покажат четири ябълки, вие веднага ги възприемате като четири, без да трябва първо да ги преброите наум. При по-голям брой плодове обаче това е невъзможно и се налага броене. Поради това най-простите системи за изписване на числа чрез групиране, когато трябва да представят числа, по-големи от 4, използват четири успоредни чертици, пресечени с една, които по този начин стават пет – ~~IIII~~.

Римски надпис, илюстриращ използването на букви като цифри.

При тази система записването на по-големи числа става и с помощта на метода изваждане като при римските цифри, където поставянето на по-малка цифра пред по-голяма означава изваждане. Така например XI означава 11 (10 + 1 –увеличаващо групиране), докато IX е 9 (10 - 1 – намаляващо групиране). Макар тази система да не е попречила на римляните да управляват огромната си империя, тя има доста големи недостатъци. Дори при числата от едно до десет се налага записване на поне четири знака, а по-нагоре (до сто например) вече има числа, които се записват с цели осем знака. Освен това аритметичните действия с такива числа никак не са удобни.

ЗАПИСВАНЕ НА ЧИСЛА ЧРЕЗ МУЛТИПЛИЦИРАНЕ

Тази система за записване на числа използва по-малко числови знаци от групирането. За разлика от нея тук записаните една до друга цифри не се събират, а се умножават – т.е. числото, което те обозначават, не е сумата от тях, а тяхното произведение (сума означава резултатът от събирането на числата, а произведение – резултатът от тяхното умножение). Днес в Китай използват точно тази система, като са въвели девет символа за числата от едно до девет и други символи за 10, 100 и 1000. Големите числа се записват, като някой от символите от 1 до 9 се умножава по 10, 100 или 1000. Вижте примерите в следната таблица:



При тази система числата от 1 до 10 се изписват само с един символ, тези от 11 до 20 – с два, а числата по-нататък до 99 – с три.

ЗАПИСВАНЕ НА ЧИСЛА С ПОМОЩТА НА КОД

Големите числа придобиват много компактен вид, когато се записват с помощта на кодова система, при която всяко голямо кратно число се предава с отделен символ. Така например в йератическата бройна система на Древен Египет съществуват отделни символи не само за числата от едно до девет, но също и за кратните числа 10, 20, 30 и т.н.; 100, 200, 300 и т.н.; 1000, 2000, 3000 и т.н. Така едно четирицифрено число може да се напише само с четири символа, но големият брой специфични числови знаци на тази система, я правят доста трудна за усвояване. Но това може би е било нарочно заложено при нейното разработване, тъй като да записват и разчитат числата можели само образованите и посветените египтяни, с което се бетонирал статутът на елитните класи на писарите и жреците, които единствени познавали тайните на големите числа.

Използването на буквите от азбуката за обозначаване на числа е друг тип кодова система, която се среща при гърците и евреите. Древните гърци, при целия им напредък в математическите науки, непрестанно трябвало да се борят с трудностите при записване на големи числа и/или принудени да използват дори архаични букви, отдавна отпаднали от употреба при писане.

ЗАПИСВАНЕ НА ЧИСЛА ЧРЕЗ ПОЗИЦИОНИРАНЕ

Тази система предлага баланс между удобство при използване и лесно заучаване. Поради това позиционната система днес се използва най-широко. Тя много прилича на мултипликационната, но символите тук не показват сами по себе си размера на основата (10, 100 или 1000 например). Мястото (позицията), което всеки символ заема при изписване на числото, показва от кой разред е той. Така например в числото 437 това, че четворката се намира на трета позиция от дясно наляво, означава, че тя обозначава броя на стотиците в това число (и няма нужда да се записва като 4 . 100). Позиционната система може да функционира само при наличие на символ за „нищо“ – нулата. Без нея не може да се разбере дали едно число, изписвано с 3 и 4 например, е 34, 304 или 340. На този проблем са се натъкнали още древните шумери, които вероятно първи са въвели позиционната система за записване на числата – още през третото хилядолетие преди новата ера. Нашата нула е с индийско-арабски корени (вж. стр. 93), но други цивилизации вместо нула оставяли по-широк интервал между цифрите – китайците вероятно първи въвели тази практика през III в. пр. н. е.

Древноегипетски каменен надпис, съдържащ големи и малки числа.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

ДРЕВЕН ЕГИПЕТ

Хората от Западна Европа смятат Древна Гърция за родина на математиката, но самите древни елини се учили на математика от египтяните, чиято цивилизация била много по-древна от класическата епоха на Елада. Реликвите на древноегипетската цивилизация и най-вече забележителната ѝ монументална архитектура загатват за отлично познаване на някои математически принципи.

Днес знаем, че древните египтяни поддържали огромна армия, многоброен чиновнически апарат и се справяли с предизвикателствата на едрото земевладение и селскостопанско производство, данъчната система и други подобни, при това се справяли успешно хилядолетия наред. В запазените от онова време скулптури, след боговете най-често са изобразявани писарите. Знаем също така, че системата на образование и подготовка е била много добре развита. Въпреки това, всичко, което се е запазило до днес и което дава преки сведения за математическите умения на древните египтяни, са няколко керамични фрагмента и два папирусни текста. Папирусът на Ринд (или на Ахмес) датира от около 1650 г. пр. н. е., но представлява препис от много по-стар текст, а Московският папирус е датиран към 1890 г. пр. н. е. (вж. рубриката „Свидетелства“).

ЕГИПЕТСКИТЕ ЧИСЛА

Египтяните използвали десетична (с основа 10) бройна система. В йероглифните текстове числата от едно до девет са изобразявани с вертикални чертици или нарези. За числата 10, 100, 1000 и т.н. до милион те притежавали отделни символи (вж. таблицата на следващата страница), но имайте предвид, че учените дават различна интерпретация на някои египетски числови знаци). Числата били записвани по метода на групирането на отделните знаци: във всеки разред били записвани до девет еднакви символа (за цифрите от 1 до 9), като ги подреждали така, че числото лесно да се разпознава от пръв поглед, без да трябва да се броят знаците наум. Въпреки това, изписването на големи числа изисквало многобройни символи. Освен с йероглифното писмо и бройната система древните египтяни разполагали и с йератическа такава, при която числата се изписвали с кодова система (вж. стр. 19). Йератическото писмо било по-трудно за научаване, но заемало по-малко място при използването на ценния папирус.

Древноегипетски релеф, изобразяващ писари с пособия за писане, готови да записват каквото е необходимо.

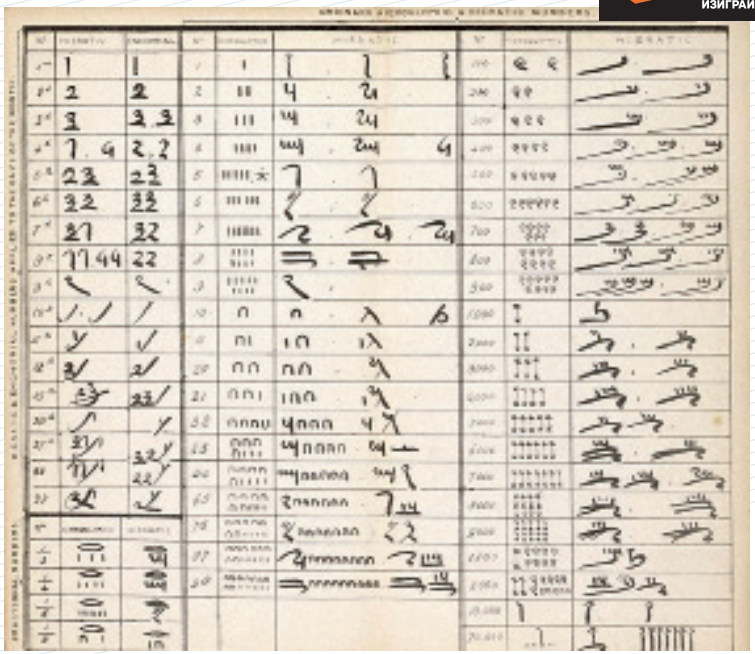
ЙЕРОГЛИФНИТЕ ЧИСЛА

Тези числа могат да се видят по релефната украса на гробници и други паметници от онази епоха. На един релеф, наречен „Преброяване на добитъка“, са представени стада говеда, магарета и кози със съответните йероглифни числа, определящи броя на главите добитък във всяко от тях. Това вероятно са били животните, които високопоставеният покойник е притежавал приживе и които се е надявал да отнесе със себе си в задгробния живот. На една стела (фиксирана във вертикално положение каменна плоча) от некропола в Гиза са представени покойният принц Уепем-

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

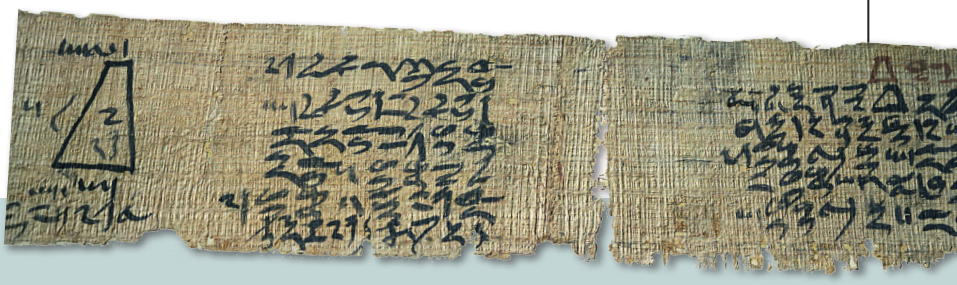
нофрет пред маса с вотивни дарове и списък на предметите, които той отнася след своята смърт, в това число хиляда алабастрови съда, хиляда стомни с бира и хиляда антилопи!

Йероглифни числа са изписани и по метъра на Мая – ковчежник на фараона Тутанкамон. Този метър представлява дървена гравирана линия с надписани и обозначени с числа мерни единици за дължина, като са представени и дроби (вж. рубриката „Какво представляват дробите?“ на стр. 24). За измерване на по-големи разстояния египтяните използвали въжета с възли през определен интервал – т.нар. царски аршин = 52,5 см, определян като разстоянието от лакътя до края на средния пръст на ръката. Древните гърци наричали египетските землемери *харпедонапти*, т.е. „опъващи въжета“.



Таблица, представяща йероглифните числа, техните йератически съответствия и стойности с арабски цифри.

Фрагмент от Московския папирус.



СВИДЕТЕЛСТВА

Почти всичко, което знаем за 3000-годишната история на древноегипетската математика, дължим на два рушащи се къса папирус. Папирусът на Ринд е купен в Египет през 1858 г. от шотландския любител на старините Алекзандър Хенри Ринд и днес носи неговото име. По-често наричат безценния свитък „папирусът на Ахмес“ по името на работилия около 1650 г. пр. н. е. египетски писар, който писал по този папирус и оставил и своето име върху него. Ахмес споменава, че преписал този текст от по-стар ръкопис, вероятно от времето на Средното царство (2000 – 1800 г. пр. н. е.). Папирусът на Ахмес е широк около 30 см и има дължина от 5,5 метра. На него са изписани 87 математически упражнения и задачи, които учениците вероятно е трябвало да решават с помощта на своите учители.

Московският папирус е купен също в Египет през 1893 г. и по-късно продаден на Московския музей на изящните изкуства. Известен е и под името „папируса на Голенишчев“ (по името на човека, който го е купил). Текстът на него е писан от неизвестен писар по време на Дванадесета египетска династия (около 1890 г. пр. н. е.). На дължина е почти колкото папируса на Ринд, но ширината му е само 7,5 см; съдържа 25 математически задачи.

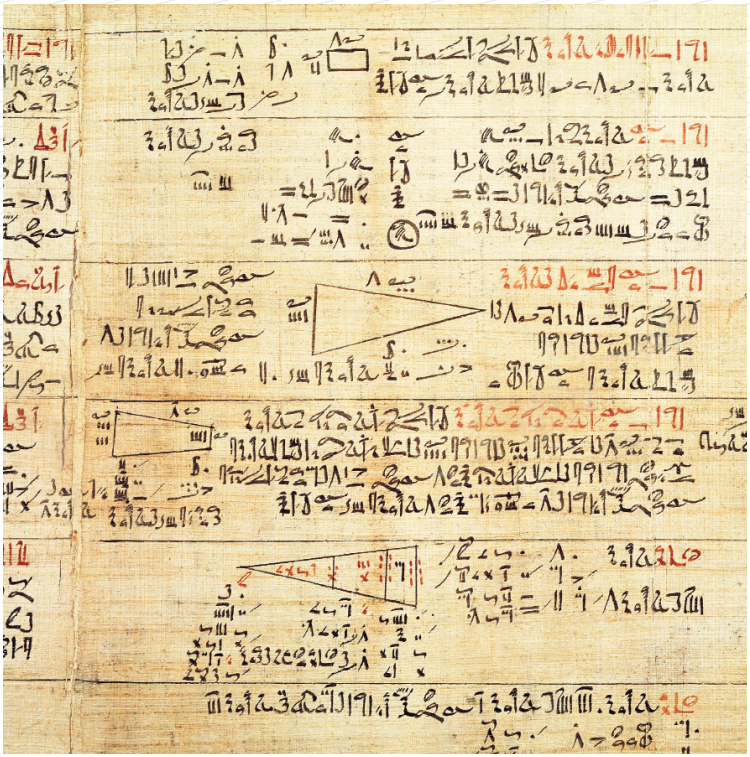
OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

ЕСТЕСТВОТО НА МАТЕМАТИЧЕСКИТЕ ЗНАНИЯ В ДРЕВЕН ЕГИПЕТ

Папирусът на Ринд/Ахмес и онзи от Москва ни представят математиката на Египет като насочена към практиката и притежаваща някои специфики. Тези специфики се откриват в описаните задачи, насочени също към практическото приложение на математическите знания, без да се прави опит да бъдат извлечени общи принципи или да се формулират уравнения. Учениците очевидно е трябвало сами да правят тези изводи за себе си при мисловни упражнения на друга инстанция, вероятно пак с помощта на своите учители.

Математическият метод на древните египтяни се основавал на събирането, което е по-лесно от умножението. В областта на умножението и делението въпросните папируси прилагат метода на двоичното мултиплициране (вж. стр. 24), който позволява да се умножава и дели посредством събиране. Макар да познавали дробите, египтяните прилагали и при тях въпросния метод на събиране.

Друга характеристика на древноегипетската математика е, че при нея не се прави особена разлика между приблизителния и точния отговор. И това е напълно разбираемо, тъй като математиката се е използвала предимно като приложна наука. От друга страна, това ни изненадва, като имаме предвид прецизността, с която са изпълнени грандиозните египетски архитектурни проекти. В общи линии беглият портрет, който получаваме за древноегипетската математика от споменатите два папируса, е изненадващ – все пак древните гърци са смятали Египет за източник на велика математическа мъдрост. И Талес, и Питагор – двама от най-великите математици на древния свят, са ходили да учат математика именно в Египет. Явно там е имало много повече неща, които са



Задачи от папируса на Ринд.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

ВЕЛИКАТА АЛЕКСАНДРИЙСКА БИБЛИОТЕКА

Мозайка, представ... ща сгради в Древна Александрия.

Египетската Александрия е основана през 330 г. пр. н. е. от Александър Велики, след което става столица на гръко-египетската династия на Птолемеите, управлявала Египет до завладяването му от римляните през 30 г. пр. н. е. Александровият генерал Птолемей I Сотер е основоположник на тази династия. Той основал храм на музите, наречен Музейон. Синът му Птолемей II Филаделф основал библиотека в този храм чрез личната колекция на Аристотел. Следващият представител на Птолемеите – Птолемей III Евергет, жадно събирал книги и папирусови свитъци, докато според легендата библиотеката придобила над половин милион свитъка. Пак според легендите съдбата на Александрийската библиотека била различна – нейното унищожаване се приписва ту на Юлий Цезар през 47 г. пр. н. е., ту на тълпите от ревностни християни през 391 г., ту на мюсюлманските завоеватели на Египет през 640 г. По всичко изглежда, че в храмовия комплекс са съществували няколко библиотеки, които обаче са съдържали далеч по-малко книги и свитъци, отколкото се разказва в легендата. Те изглежда са били унищожени постепенно с течение на времето от алчни колекционери, земетресения и пожари, причинени от непрестанните конфликти и размирици в града. Местоположението на Великата библиотека при Музейона все още не е установено.

могли да научат, отколкото ни се представя в запазените два папируса (на Ринд и Московския). И така, какво се е случило с останалата част от древноегипетското математическо познание? Един от възможните отговори е, че папирусите с по-сложни математически текстове са били съхранявани в Александрийската библиотека и са изчезнали при нейното унищожаване (вж. рубриката „Великата Александрийска библиотека“).

Тази 4000-годишна таблица представя областите на Древен Египет с отбелязване на тяхната площ и броя на главите добитък, отглеждан във всяка от тях.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

КАКВО СА ДРОБИТЕ?

Дробите са средство да се изчисли част от нещо цяло. В днешната система за записване на обикновени дроби те са представяни от две числа едно под друго, разделени от дробна черта. Над нея се изписва числителят, който показва колко равни части от цялото сме отделили. Под дробната черта се записва знаменателят, който показва на колко равни части сме разделили това цяло. Така при дробта ¼ знаменателят ни показва, че цялото е разделено на четири равни части, а числителят уточнява, че дадената дроб представлява една от тези четири части.

Египетски дървени метри, на които са отбелязани цели единици, разделени на дроби.

ЕГИПЕТСКИТЕ ДРОБИ

Осемдесет и една от 87-те задачи в папируса на Ринд включват използването на дроби. Египетският метод за изчисляване на дроби е „най-забележителната страна на египетската аритметика“, смята Дирк Струик (1894 – 2000) – американски математик от холандски произход, прекарал по-голямата част от своя живот в САЩ.

Египтяните използвали само аликвотни дроби – дроби с числител (числото над дробната черта) единица. Всички техни дроби имали вида на ½, ⅓, $^1/_{56}$ и т.н. На алгебричен език казваме, че това са дроби от вида $^1/_n$. Единственото изключение в това отношение египтяните направили за дробта ⅔, но за нея създали специален символ.

За да изразят дроби с числител, различен от 1, египтяните събирали аликвотни дроби с различни знаменатели. Така например те представяли дробта $^2/_{43}$ като сбор от: $^1/_{42} + ^1/_{86} + ^1/_{129} + ^1/_{301}$. При това нито една от тези дроби не се повтаря. Една от неразгаданите мистерии на египетската математика е защо при изразяването на някаква дроб с числител, различен от 1, събирали точно определени аликвотни дроби, а не други. В случая с $^2/_{43}$ един и същ резултат се получава при събирането на няколко комбинации от дроби – откъде знаели тогавашните писари кои точно дроби да изберат в дадения случай?

За да не допусне всеки от учениците да избере своя комбинация от дроби, папирусът на Ринд/Ахмес започва с таблица на готови дробни комбинации за числото 2, разделено на всички нечетни числа от 5 до 101. Освен това египтяните не изписвали числител на дробта, защото той винаги бил равен на единица. Затова те просто поставяли един овален знак на знаменателя, което показвало, че става дума за дроб. Дробите ½ и ⅔ се изписвали чрез специални символи: ½ – със сгънат на две плат, а ⅔ – с овал върху две къси стълбчета. На таблицата по-долу е представено началото на таблицата с дроби от папируса на Ринд/Ахмес. В първата колона са показани нечетните знаменатели на дроб с числител 2, а в следващите колони – чрез сбора на какви аликвотни дроби може да бъде представена дробта от първата колона. Там ще видите например, че ⅔ са равни на сбора от ⅓ + $^1/_{15}$, че $^2/_{13}$ може да бъдат записани като сбор от ⅛ + $^1/_{52}$ + $^1/_{104}$ и т.н.

2/n	1/p	+	1/q	+	1/r
5	3		15		
7	4		28		
9	6		18		
11	6		66		
13	8		52		104
15	10		30		

ДВОИЧНО УМНОЖЕНИЕ

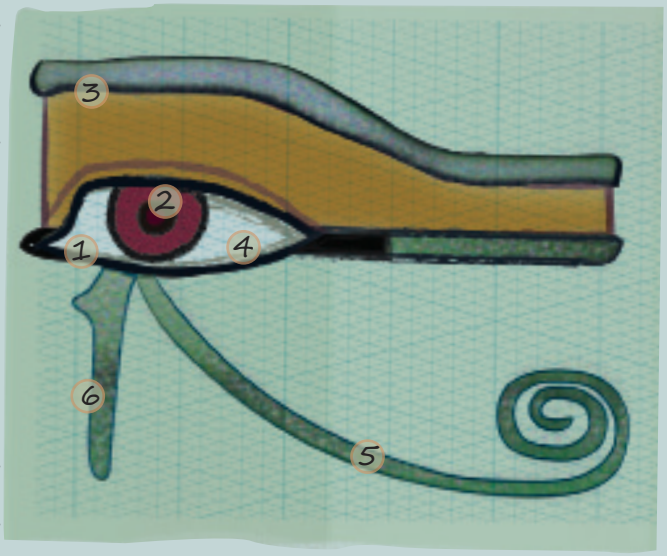
При умножението и делението древните египтяни използвали двоичната система. Това е форма на бинарно смятане (смятане с основа 2; вж. „Обяснение на базите“ на стр. 40), която представлява аритметическо улеснение (цялата работа се свежда само до събиране), но е доста трудоемка. Освен това, макар тази система да е много проста, тя работи само когато резултатът е цяло число, а не дроб.

ОКОТО НА ХОР

Удобно помагало за запомняне на първите шест намаляващи наполовина една спрямо друга аликвотни дроби (с числител 1, т.е. ½, ¼, ⅛ и т.н.) е така нареченото око на Хор – символ на закрилата и доброто здраве. Неговите елементи били използвани от древните египтяни за представяне на споменатите по-горе дроби, сборът от които давал едно цяло:

1 – лявата част на окото = ½
2 – зеницата = ¼
3 – веждата = ⅛
4 – дясната част на окото = 1/16
5 – завитата опашчица (на символа) = 1/32
6 – сълзата = 1/64

В действителност сборът от тези дроби не дава точно 1, а 63/64. Може би в това е била заключена философската поука, че „пълното съвършенство е непостижимо", а може и да е само пример за небрежното отношение на древноегипетските математици към разликата между точни и приблизителни резултати, което, както казахме, е една от характерните черти на тази наука в Древен Египет. Отделните елементи на окото на Хор могат да бъдат използвани и за изразяване на неаликвотни дроби. Така например ½ + ⅛ = 5/8, което, преведено на езика на символите, може да се каже така: „лявата част на окото плюс веждата".



Окото на Хор, използвано от древните египтяни за припомняне на дроби.

Двоичната система представлява умножение на съставните части на едното число по другото. За да се прилага само действие събиране, в лявата колона на таблицата първо се записва 1, а на всеки следващ ред надолу тази цифра се удвоява (1 + 1 = 2; 2 + 2 = 4; 4 + 4 = 8 и т.н.). Срещу тези редове в дясната колона на първия ред е вторият множител, който на всеки по-долен ред се удвоява (но пак на принципа на събирането: например 11; 11 + 11 = 22; 22 + 22 = 44; 44 + 44 = 88 и т.н.). В дъното на таблицата, в лявата колона, първият множител се представя като сбор от няколко цели числа (например 13 = 1 + 4 + 8), а в дясната колона резултатът от „умножението" се представя като сбор от съответния множител (в нашия случай 11) с 1, с 4 и с 8. Ето таблицата, която древноегипетският писар би съставил, ако иска да умножи 13 по 11, използвайки двоичната система:

13	11
1	(1 . 11) = 11
2	(2 . 11) = 22
4	(4 . 11) = 44
8	(8 . 11) = 88
(1 + 4 + 8) = 13	(11 + 44 + 88) = 143

При деленето процесът е противоположен, като писарите подготвяли същата таблица. Цифрите 1, 2, 4, 8 се записвали в дясната колона, а срещу тях в лявата съответните „произведения" на втория множител. Така в дъното на лявата колона се получавал верният отговор (частното от извършеното делене). Ето как би изглеждала една такава таблица за 143 делено на 13:

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

ВЕДНЪЖ СРЕЩНАХ НА ПЪТЯ...

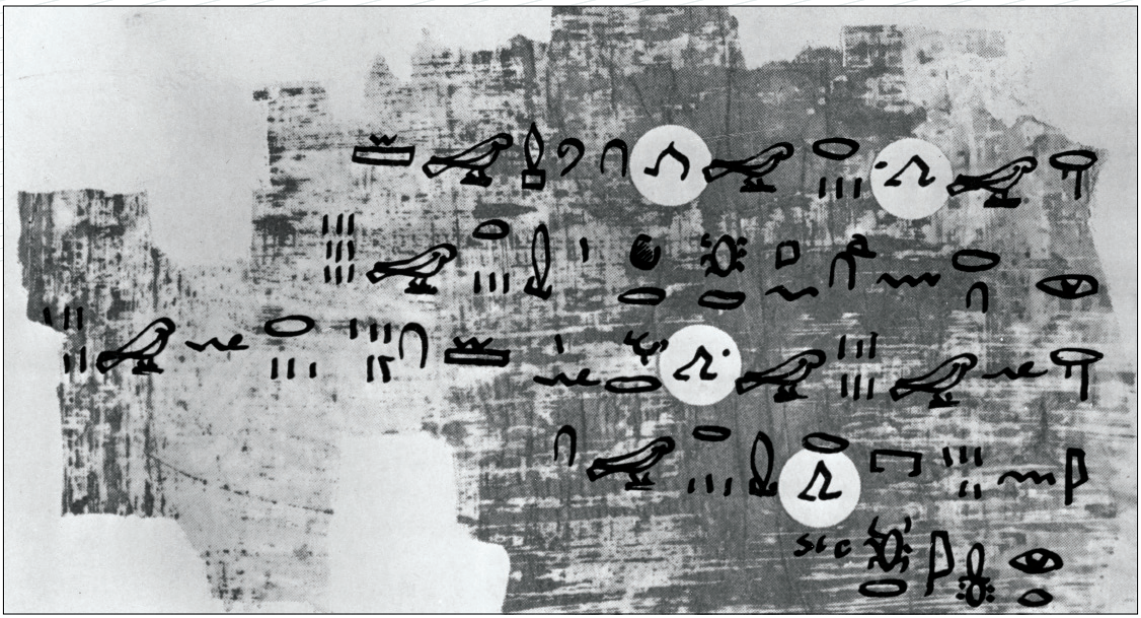
Задача № 79 в папируса на Ринд/Ахмес се отнася до „7 къщи, 49 котки, 343 мишки, 2401 класа пшеница, 16 807 хеката" (1 хекат е мярка за тегло на зърнени храни – около 5 кг). Забележителното тук е, че тази задача напомня за една забавна детска задача от близкото минало: „Веднъж срещнах на пътя човек със седем жени, като всяка от тях имаше по седем торби, във всяка торба – по седем котки, а всяка котка имаше по седем котенца. Колко са били котенцата, котките, торбите и жените?". Става ясно, че египтяните са имали представа от геометрична прогресия, защото в случая отговорите на тази задача образуват именно такава прогресия: 7, 7^2, 7^3, 7^4 и 7^5.

?	13
1	(1 . 13) = 13
2	(2 . 13) = 26
4	(4 . 13) = 52
8	(8 . 13) = 104
(1 + 2 + 8) = 11	(13 + 26 + 104) = 143

ИЗЧИСЛЯВАНЕ НА СУМА И НАКЛОН

Папирусът на Ринд/Ахмес дава интересни сведения и за други математически способности на древните египтяни. Както е известно, в началото на алгебрата стоят най-простите линеарни уравнения от типа $x + ax = b$, където a и b са известни величини, докато x е неизвестното. В папируса на Ринд/Ахмес се срещат задачи, в които се търси неизвестната сума, ако тя, увеличена например с една седма от самата нея, дава числото 19 (задача № 24). На алгебричен език това би се изразило така: $x + {}^{x}/_{7} = 19$. Тъй като египетският йероглиф за сума се нарича *аха*, този вид изчисления понякога се наричат аха-смятане. (Верният отговор в случая е: $x = 16{,}625$, но древните египтяни вероятно са записвали числото 16, последвано от няколко аликвотни дроби.)

Папирусът на Ринд/Ахмес предлага задачи и за намиране на градуса на наклон, наричан от древните египтяни *секет*. Това на практика е отчитане на ритъма на издигане на хипотенузата на правоъгълния триъгълник (хипотенуза наричаме най-дългата му страна). Това математическо познание сигурно е имало важно практическо приложение при строителството на пирамиди. Други практически умения са били определянето на повърхността на четириъгълник. Според древногръцкия историк Херодот това било необходимо на египтяните при възстановяването на поземле-



Задачи от папируса на Ринд/Ахмес, съдържащи символа „вървящи крака" (маркиран с бяла подложка) – когато краката вървят наляво, това е знак за събиране; когато вървят надясно, става въпрос за изваждане.

OZONE.bg
ИЗИГРАЙ СКУКАТА!

Голямата пирамида край Гиза – обект на какви ли не математически митове.

ните владения и точното прокарване на границите между тях, унищожени при поредното разливане на река Нил.

КВАДРАТУРАТА НА КРЪГА

В задача № 50 на папируса на Ринд/Ахмес се споменава, че кръг с диаметър 9 има еднаква повърхност с квадрат със страна 8. От това приблизително равенство следва изводът, че за египтяните числото π (пи) е имало стойност около 3,16, което не е много далеч от реалните 3,14159... Можем да се запитаме как са стигнали до този резултат. В задача № 48 се съдържа един от възможните подходи. Там се препоръчва при изчисляване на повърхнината на кръг около него да се опише квадрат, а в него да се впише осмоъгълник. Древноегипетските математици знаели формулата за лице на триъгълник (половината от основата, умножена по височината към нея). За тях не било трудно да изчислят повърхнината на оставащите във всеки ъгъл на квадрата триъгълници и да я извадят от общата повърхнина на квадрата. Така те получавали лицето на осмоъгълника, което според тях било достатъчно близко до лицето на описания около него кръг.

МИСТЕРИИ И МИТОВЕ

Московският папирус дава указания на учениците как да изчисляват обема на пресечена пирамида (фрустум). В папируса има дори диаграма на разрез на пресечената пирамида, като се дават обяснения как фактически се стига до формулата за обем на пресечена пирамида. Тази формула е доста сложна и след като днешната математическа наука прибягва при изчисляването на този вид обеми (по производни от същата формула!) до диференциалното смятане (вж. стр. 160), остава загадка как древните египтяни са успели да достигнат до нея.

Освен на фрустум древните египтяни знаели да изчисляват и обема на пирамида, като показали завидни умения при проектирането и построяването на не един такъв паметник. Въпреки това, особено около построяването на Голямата пирамида край Гиза, са възникнали множество митове и легенди. Често се споменава например, че периметърът на основата на тази пирамида е равен на диаметъра на кръг с радиус, равен на височината на пирамидата, макар по тази формула стойността на числото π (пи) да е по-неточна от онази, която древните египтяни без съмнение познавали и за която писали (свидетелство за това намираме в споменатата по-горе задача № 50 от папируса на Ринд/Ахмес).