Ирина Шаркова
Мария Христова
Донка Капралова
Веселин Златилов
Иван Тонов

Математика

8. клас

РЕГАЛИЯ 6

Използвани означения:

! обърнете внимание

исторически бележки

алгоритъм при решаване на някои задачи

* незадължителен текст с повишена трудност *

© Ирина Шаркова, Мария Христова, Донка Капралова, Веселин Златилов, Иван Тонов, автори, 2017 г.

© Красимира Коцева, графичен дизайн, 2017 г.

© Николай Цачев, корица, 2017 г.

© „Регалия 6“ издателство, 2017 г.

ISBN 978-954-745-277-0

СЪДЪРЖАНИЕ

Тема 4. Квадратен корен

Тема 5. Квадратни уравнения

ТЕМА 1

КОМБИНАТОРИКА

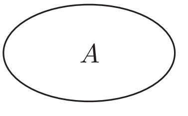
1 МНОЖЕСТВА

В математиката, както и в ежедневието, често разглеждаме съвкупности от обекти, обединени от някакъв общ признак. Например учениците от един клас, книгите в една библиотека, точките от една отсечка, четните естествени числа и др. Такива съвкупности в математиката наричаме множества.

Множеството е първично понятие за математиката и затова не се дава строго определение, а само описание.

Въвеждането на множествата и идеята за приложенията им дължим на германския математик Георг Кантор (1845–1918). В ежедневния език използваме думи като клас, ако става дума за ученици, колектив, колекция, а ако става дума за животни използваме стадо, рояк и други подобни. Всички такива думи ни дават примери за множества.

Обектите, които съставят множеството A наричаме негови елементи.



Ако a е елемент на A, се записва $a \in A$ и се чете a принадлежи на A. Ако елементът a не принадлежи на A, се записва $a \notin A$.

Едно множество може да бъде зададено чрез посочване на неговите елементи или чрез описание на признака, по който е съставено това множество. Например:

– чрез посочване $A = \{3, 5, 7, 9\}$, $B = \{a, b, c, d, e\}$ или $C = \{+, -, \times, :\}$.

– чрез признак: A е множеството на четните числа, B е множеството на рационалните числа от интервала $(-1; 4)$ или C е множеството на всички прави, които минават през точката M.

Определение 1

Две множества A и B са **равни**, ако се състоят от едни и същи елементи. Записва се така $A = B$.

Това означава, че всеки елемент на множеството A принадлежи на множеството B и обратно – всеки елемент на B принадлежи на A. Например:

– множеството $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ е равно на множеството от нечетните едноцифрени числа;

– множеството на всички двуцифрени числа, сборът от цифрите на които е равен на 7, съвпада с множеството $A = \{16, 25, 34, 43, 52, 61, 70\}$.

Елементи на множеството могат да бъдат конкретни предмети – столове, маси, животни, хора или по-абстрактни понятия – числа, уравнения, изрази, литературни произведения, телевизионни предавания. Някои множества могат да играят роля на елементи от други множества. Например можем да говорим за множеството от класовете в едно училище, макар че всеки клас от своя страна е множество от ученици.

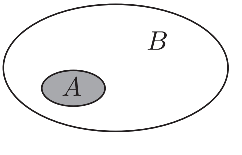
Прието е да се разглежда и множество, което не съдържа нито един елемент. Това множество се нарича **празно** множество и се бележи със знака $\varnothing$.

Използването на празното множество носи известни удобства, в което ще се убедим по-нататък. Пример за празно множество е множеството от отговорите на всички въпроси, които нямат отговори. Например: Кое е множеството от нечетни числа с цифра на единиците 2?

Определение 2

Ако всички елементи на едно множество A са елементи на множество B, се казва, че A е **подмножество** на B. Бележи се така $A \subset B$.

Например множеството на целите числа, кратни на 4, е подмножество на множеството на четните числа.



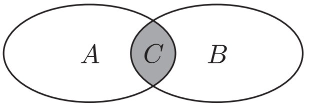
Всяко множество се приема за свое подмножество ($A \subset A$), а празното множество е подмножество на всички множества ($\varnothing \subset B$).

Ако едно множество има n елемента, където n е естествено число, се казва, че то е **крайно**. В противен случай множеството е **безкрайно**.

Определение 3

Сечение на две множества A и B се нарича ново множество C, елементите на което принадлежат на всяко от двете множества. Сечението на двете множества се означава с $C = A \cap B$.

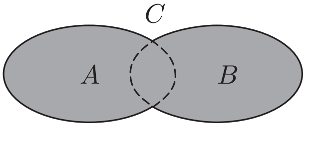
Например, ако A е множеството на всички момичета, които се учат във вашето училище, а B е множеството от всички ученици във вашия клас, сечението $C = A \cap B$ представлява множеството от момичетата във вашия клас. Или ако множествата A и B са някакви геометрични фигури, сечението им се състои от общите точки на двете фигури.



В случай, че двете множества нямат общи елементи, сечението им е празното множество $A \cap B = \varnothing$.

Определение 4

Обединение на две множества A и B се нарича ново множество C, състоящо се от тези елементи, които принадлежат на поне едно от двете множества. Обединението на двете множества се означава с $C = A \cup B$.



Може да се случи двете множества да имат общ елемент. Тогава този елемент влиза в обединението само веднъж – **да напомним, че за множеството няма смисъл един и същ елемент да влиза в него няколко пъти.** Например, ако $A = \{3, 4, 5, 6\}$ и $B = \{5, 6, 7, 8\}$, то
$C = A \cup B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

Задачи

1. Обяснете защо $\{a, b, c\} = \{b, c, a\}$.

2. Запишете множеството на четните едноцифрени числа.

3. Запишете множеството на двуцифрените числа, кратни на 20.

4. Запишете всички подмножества на множеството $\{a, b, c\}$, като не забравите за празното множество и самото множество. Какъв е броят на тези подмножества?

5. Запишете всички подмножества на множеството $\{a, b, c, d\}$, които имат точно два елемента.

6. В множеството на обикновените правилни дроби със знаменател 24 отделете подмножеството от несъкратимите дроби.

7. Покажете, че ако A е множеството на всички правоъгълници и B е множеството на всички ромбове, то $C = A \cap B$ е множеството на всички квадрати.

8. Нека $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ и $B = \{2, 5, 8\}$ Намерете $A \cup B$ и $A \cap B$.

9. Нека $A = \{3, x, 7\}$ и $B = \{3, 5, w\}$. Намерете x и w, така че $A \cup B = A \cap B$.

10. Намерете естествените числа m и n, така че $\{m, n, n+6\} = \{17, 20, 11\}$.

11. Намерете множествата A и B ако е известно, че $A \cup B = \{5, 6, 8, 9, 11, 15, 17\}$, $A \cap B = \{5, 17\}$ и числата 8 и 11 принадлежат на A, но не принадлежат на B.

12. Намерете естественото число n, така че $\{n+12, 2n+9, 5n+3\} = \{n+16, 2n+5, 3n+17\}$.

13. Нека $A = \{0, 2\}$, а B е множеството от корените на уравнението $(x-1)(x-2) = 0$. Намерете $A \cup B$ и $A \cap B$.

2 СЪБИРАНЕ И УМНОЖЕНИЕ НА ВЪЗМОЖНОСТИ

В много практически случаи възниква необходимостта от пресмятане на броя на възможните комбинации от обекти, определени чрез някакво условие. Такива задачи наричаме комбинаторни, а частта от математиката, която се занимава с комбинаторните задачи наричаме комбинаторика. Комбинаторните задачи са много разнообразни, но повечето от тях се решават с помощта на два основни принципа – **принципа на събирането и принципа на умножението.**

Представете си, че тази вечер сте свободни и искате да посетите някое заведение. Кварталът ви предоставя избор измежду две дискотеки, три киносалона и четири сладкарници. При това положение колко възможности имате за избор? Отговорът на този въпрос е ясен – две възможности за дискотека, три възможности за кино и накрая още четири възможности за сладкарница – общо $2 + 3 + 4 = 9$ възможности. Това по същество е принципът на събирането.

Броят на елементите на крайно множество A се означава с $n(A)$.

Принцип на събирането: Ако A и B са две крайни множества, сечението на които е празното множество, т.е. $A \cap B = \varnothing$, то $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.

Да отбележим, че това правило не остава в сила, ако има поне един елемент, принадлежащ на двете множества.

Тогава е в сила правилото $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$, което се нарича **Принцип за включване и изключване.**

Задача 1. На рафт от библиотека са подредени 20-те тома от съчиненията на Иван Вазов, 16-те тома на Елин Пелин и 18-те тома на Йордан Йовков. Краси решава да вземе една от тези книги. По колко начина може да направи това?

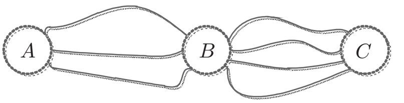
Решение:

Използваме принципа на събирането. Ясно е, че множествата на книгите на Иван Вазов, Елин Пелин и Йордан Йовков не може да имат общи елементи. Следователно Краси може да избере книга по $20 + 16 + 18 = 54$ начина.

Да се върнем сега към вашата свободна вечер. Решили сте да отидете на кино, след това на сладкарница и да завършите в дискотека. По колко начина може да направите това? Ще разсъждаваме така – имаме три възможности за кино и след като сме избрали киносалона имаме четири възможности за сладкарница. Това прави $3.4 = 12$ възможности за кино и сладкарница и след това всяка от тези 12 възможности може да се комбинира с някоя от двете дискотеки, т.е. общо $12.2 = 24$ възможности. Този пример илюстрира принципа на умножението.

Принцип на умножението: Ако трябва да избираме двойка елементи – един от множеството A и един от множеството B, това може да се извърши по $n(A).n(B)$ начина.

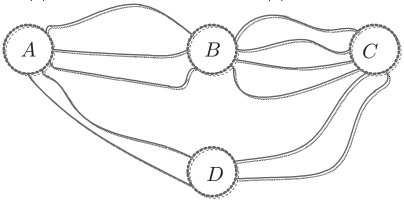
Задача 2. Три пътя свързват A и B, а четири пътя свързват B и C. По колко начина може да се стигне от A до C през B и обратно – от C до A през B?



Решение:

Използваме принципа на умножението. За пътуването от A до C през B имаме $3.4 = 12$ възможности. За обратния път – също 12 възможности. Отново според принципа на умножението за комбинирането на двата маршрута, по един във всяка посока, ще имаме $12.12 = 144$ начина.

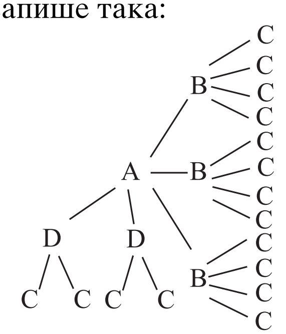
Задача 3. Продължаваме условието на предишната задача. Оказало се, че има пункт D, който е свързан с две линии до A и с две линии до C. По колко начина сега може да се стигне от A до C?



Решение:

Като използваме принципа на умножението получаваме, че има $2.2 = 4$ начина за пътуване от A до C през D и като използваме принципа за събиране и резултата от предишната задача получаваме търсения брой $12 + 4 = 16$.

Решението може да се запише така:

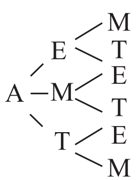


Този запис наричаме граф-дърво.

Задача 4. На картончета са написани буквите М, А, Т и Е. Колко трибуквени „думи“ може да запишем с тези картончета?

Решение:

Ще използваме граф-дърво. За първата буква имаме 4 възможности. Нека първата буква в думата е А, тогава може да запишем следните думи



Получаваме 6 възможности. От принципа на умножението, получаваме, че всички възможности са $4.6 = 24$.

Задачи

1. Изобразете с граф дърво колко трицифрени числа може да запишем, с картончета на които са записани цифрите 1, 3, 5, 8.

2. Музикален концерт се състои от три песни и две инструментални изпълнения. По колко начина може да се направи програма на концерта, така че първото и последното изпълнение да са песни, а инструменталните изпълнения да не са непосредствено едно след друго?

3. Колко са всички трицифрени числа? Колко са четните трицифрени числа?

4. Колко четирицифрени числа се делят на 5?

5. Колко са всички петцифрени числа „палиндроми", т.е. тези които се четат еднакво отзад напред и обратно?

6. На контролното по математика учителят решил да даде едно уравнение, една текстова задача и една геометрична задача. Той имал подготвени предварително 12 уравнения, 8 текстови задачи и 6 задачи по геометрия. Колко варианта за контролното може да се подготвят?

7. Колко различни делителя има числото 2000?

8. Номерата на автомобилите в Илирия съдържат четири цифри и една от 10-те илирийски букви, записана накрая. Колко най-много автомобила има в Илирия, ако номер, съставен от четири нули, не се допуска?

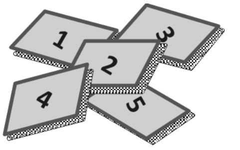
9. Върху бедрото AC на равнобедрения триъгълник ABC са взети 3 вътрешни точки, а върху другото бедро BC – съответно 4 вътрешни точки. След това са построени всички прави, които свързват върховете от основата с точките от срещулежащото бедро. Намерете броя на пресечните точки на тези прави и броя на частите, на които е разделен триъгълника.

10. (проект) Учениците от 4 клас на едно училище изучават следните предмети: БЕЛ (Български език и литература) – 5 часа, Английски език – 3 часа, Математика – 5 часа, Човекът и обществото – 2 часа, Човекът и природата – 2 часа, Изобразително изкуство – 2 часа, Домашен бит и техника – 1 час, Музика – 2 часа, Физическо възпитание и спорт – 3 часа. Направете проект за седмично разписание на една паралелка от 4. клас в това училище, като спазвате условията:

– всеки ден учениците имат по 5 часа;
– всеки предмет е не повече от 1 час на ден;
– часовете по Музика и Изобразително изкуство да са в различни дни.

3 СЪЕДИНЕНИЯ

Задача 1. В една кутия поставили 5 картончета, като на всяко от тях била написана една от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5. Пешо изважда последователно три картончета и ги слага едно до друго, така се получава трицифрено число. Колко различни трицифрени числа може да получи Пешо по този начин?



Решение:

Ще решим тази задача като приложим принципа на умножението. Ясно е, че за първата цифра на съставеното число, т.е. за цифрата на стотиците, Пешо може да избира измежду пет възможности. След като е извадена тази цифра, в кутията са останали четири картончета и за втората цифра Пешо има четири възможни избора. За третата цифра остават три възможности. Следователно според принципа на умножението ще получим $5.4.3 = 60$ възможности, които дават точно 60 различни трицифрени числа.

В решението на тази задача намерихме по колко начина можем от едно множество с 5 елемента да изберем подмножество с три елемента, като елементите влизат в подмножеството в определен ред.

Определение 1

Нека k и n са две естествени числа, за които $k \leqq n$ и A е множество с n елемента. От множеството A могат да се изберат k елемента по няколко начина. Всяко от така избраните множества от по k елемента, се нарича **съединение от n елемента k-ти клас.**

При съставянето на едно съединение ще отчитаме дали елементите му влизат в него в определен ред или този ред няма значение. В зависимост от това ще разгледаме три вида съединения – **вариации, пермутации** и **комбинации**.

В задачата, която решихме, се запознахме с пример на едно съединение, в което се избират подмножества с три елемента от едно множество от 5 елемента, като от значение е редът, по който елементите влизат в това множество. Тези съединения наричаме вариации от 5 елемента 3-ти клас.

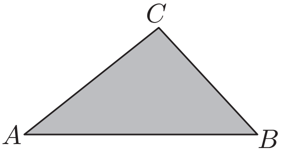
Определение 2

Вариация от n елемента k-ти клас се нарича всяко подмножество от k елемента на множество от n елемента, като се отчита редът на задаване на елементите в подмножеството.

Например, множеството $\{a, b, c, d\}$ от четири елемента има 12 вариации по 2 елемента, а именно $ab, ac, ad, ba, bc, bd, ca, cb, cd, da, db, dc$.

Формула 1: Броят на всички вариации от n елемента k-ти клас се намира с помощта на принципа на умножението, т.е. той е равен на $\boldsymbol{n.(n-1).(n-2)...(n-k+1)}$. Това число се означава с V_n^k.

Задача 2. Обикновено означаваме триъгълник с три различни букви от латинската азбука ABC, ACD, MNP и др. По колко различни начина може да се означи триъгълник, като се разрешава употребата на всичките 26 букви от латинската азбука?



Решение:

Всяко означение на триъгълник с три букви от латинската азбука е вариация на 26-те букви по 3, т.е. търсеният брой е $V_{26}^3 = 26.25.24 = 15600$.

В случая, когато $k = n$, вариацията се нарича **пермутация** на n елемента.

Определение 3

Пермутация е начин за разполагане на n елемента в определен ред.

Формула 2: Броят на пермутациите на n елемента, в частност от формулата за броя на вариациите, е $\boldsymbol{n.\,(n-1)\,.\,(n-2)\,....2.1}$. Това число се означава с $\boldsymbol{P_n}$.

Например, понеже $P_3 = 3.2, 1 = 6$, ще имаме 6 пермутации на всяко множество от три елемента, да кажем $\{a, b, c\}$. Да запишем тези 6 пермутации: $abc, acb, bac, bca, cab, cba$.

Като използваме означението за P_n, получаваме по-удобен вид на формулата за броя на вариациите от n елемента k-ти клас, а именно $V_n^k = \dfrac{P_n}{P_{n-k}}$.

Определение 4

Всяко подмножество от k елемента на множество от n елемента се нарича **комбинация** от n елемента k-ти клас.

Да напомним, че и вариацията е подмножество от k елемента на множество от n елемента, но при нея отчитаме реда, в който влизат елементите.

Това означава, че на всяка комбинация съответстват P_k на брой вариации на елементите от даденото множество по k, защото по толкова начина k елемента могат да бъдат подредени.

Формула 3: Броят на комбинациите от n елемента k-ти клас е $C_n^k = \dfrac{P_n}{P_k.P_{n-k}}$.

Обикновено тази формула прилагаме във вида $C_n^k = \dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...2.1}$.

Задача 3. Да се намери броят на комбинациите на 6 елемента 3-ти клас.

Решение:

Търсеният брой се получава от формулата $C_6^3 = \dfrac{6.5.4}{1.2.3} = 20$.

Задача 4. По колко начина при раздаване на карти може да получим 13 карти от тесте от 52 карти?

Решение:

Всеки начин отговаря на една комбинация от 52 елемента по 13. Прилагаме формулата $\dfrac{P_{52}}{P_{13}.P_{39}} = 635013559600$.

Задачи

1. Намерете броя на:

а) вариациите на 7 елемента 4-ти клас;

б) пермутациите на 7 елемента;

в) комбинациите на 7 елемента 4-ти клас.

2. По колко начина при раздаване може да получите 8 карти от тесте с 32 карти?

3. Колко четирицифрени числа с различни цифри може да съставите използвайки цифрите 4, 5, 6 и 9?

4. Колко петцифрени числа с различни цифри може да съставите използвайки цифрите 9, 3, 1, 5 и 7?

5. Тенисист трябва да играе 4 мача в 8 дни, като не може да играе повече от един мач на ден. По колко начина може да се организира програмата му за тези мачове?

6. По колко начина 6 души могат да се наредят на опашка за билети за театър?

7. В една стая има 6 лампи. Колко различни начина има за осветление, при положение, че се светват точно по три лампи?

8. В равнината са отбелязани 7 точки, така че никои три от тях не лежат на една права. Колко са различните триъгълници с върхове в тези точки?