

Роджър Пенроуз

**ПЪТЯТ КЪМ РЕАЛНОСТТА
ПЪЛЕН СПРАВОЧНИК ЗА ЗАКОНИТЕ
НА ВСЕЛЕНАТА**

София, 2017

Преводът е направен по изданието
Roger Penrose
THE ROAD TO REALITY
A Complete Guide to the Laws of the Universe
JONATHAN CAPE
London

Всички права запазени. Нито една част от тази книга не може да бъде възпроизведена или предавана под каквато и да е форма и по какъвто и да било начин без изричното съгласие на издателство „Изток-Запад“.

Copyright © Roger Penrose 2004

© Росен Люцканов, превод, 2017
© Издателство „Изток-Запад“, 2017

ISBN 978-619-01-0055-3

РОДЖЪР ПЕНРОУЗ

ПЪТЯТ КЪМ РЕАЛНОСТТА

— ПЪЛЕН СПРАВОЧНИК —
ЗА ЗАКОНИТЕ НА ВСЕЛЕНАТА

Превод от английски
Росен Люцканов

Научен редактор
Михаил Бушев



Съдържание

Предговор	13
Благодарности	22
Използвани означения	25
Въведение	29
1. Корените на науката	35
1.1. В търсене на силите, оформящи облика на света	35
1.2. Математическата истина	37
1.3. „Действителен“ ли е Платоновият математически свят?	40
1.4. Три свята и три дълбоки загадки	47
1.5. Доброто, Истинното и Красивото	52
2. Една древна теорема и един днешен въпрос	55
2.1. Теоремата на Питагор	55
2.2. Постулатите на Евклид	59
2.3. Доказателство на теоремата на Питагор чрез подобни повърхнини	62
2.4. Хиперболична геометрия: конформен подход	64
2.5. Други представяния на хиперболичната геометрия	69
2.6. Исторически аспекти на хиперболичната геометрия	74
2.7. Връзка с физическото пространство	79
3. Видове числа в материалния свят	83
3.1. Питагорейската катастрофа	83
3.2. Системата на реалните числа	87
3.3. Реалните числа в материалния свят	93
3.4. Нуждаят ли се естествените числа от материалния свят?	97
3.5. Дискретни числа в материалния свят	100
4. Магическите комплексни числа	105
4.1. Магическото число „ i “	105
4.2. Решаване на уравнения с комплексни числа	108
4.3. Сходимост на степенни редове	111
4.4. Комплексната равнина на Каспар Весел	116
4.5. Как да построим множеството на Манделброт?	118
5. Геометрия на логаритмите, степените и корените	121
5.1. Геометрични аспекти на комплексната алгебра	121
5.2. Идеята за комплексен логаритъм	126
5.3. Многозначност, естествени логаритми	128
5.4. Комплексни степени	133
5.5. Някои препратки към съвременната физика на елементарните частици	136

6. Реален математически анализ	139
6.1. Какви качества трябва да има една истинска функция?	139
6.2. Наклон на функция	142
6.3. Производни от по-висок ред; C^∞ -гладки функции	144
6.4. „Ойлеровото“ понятие за функция?	149
6.5. Правила за диференциране	151
6.6. Интегриране	154
7. Комплексно-числов анализ	159
7.1. Комплексна гладкост; холоморфни функции	159
7.2. Интегриране по контур	161
7.3. От комплексна гладкост към степенни редове	165
7.4. Аналитично продължение	167
8. Риманови повърхнини и комплексни изображения	173
8.1. Идея за риманова повърхнина	173
8.2. Конформни изображения	177
8.3. Римановата сфера	181
8.4. Род на компактна риманова повърхнина	185
8.5. Теорема на Риман за изображенията	189
9. Разлагане в ред на Фурие и хиперфункции	193
9.1. Ред на Фурие	193
9.2. Функции върху окръжност	198
9.3. Честотно разлагане върху римановата сфера	202
9.4. Преобразование на Фурие	205
9.5. Честотно разцепване чрез преобразование на Фурие	207
9.6. Кой вид функция е подходящ?	210
9.7. Хиперфункции	213
10. Повърхнини	221
10.1. Комплексна и реална размерност	221
10.2. Гладкост и частни производни	223
10.3. Векторни полета и 1-форми	228
10.4. Компоненти, скаларни произведения	233
10.5. Уравнения на Коши-Риман	236
11. Хиперкомплексни числа	241
11.1. Алгебра на кватернионите	241
11.2. Ролята на кватернионите във физиката	244
11.3. Геометрия на кватернионите	247
11.4. Как се съчетават ротации	251
11.5. Клифордови алгебри	253
11.6. Грасманови алгебри	256
12. n-мерни многообразия	261
12.1. Защо да изучаваме многомерните многообразия?	261
12.2. Многообразия и координатни парчета	266
12.3. Скалари, вектори и ковектори	268
12.4. Грасманови произведения	273
12.5. Интегриране на форми	276
12.6. Диференциална форма	278

12.7. Обмен елемент; конвенция за сумиране	284
12.8. Тензори: абстрактно-индексен и диаграмен запис	286
12.9. Комплексни многообразия	291
13. Групи на симетрия	293
13.1. Групи от трансформации	293
13.2. Подгрупи и прости групи	297
13.3. Линейни трансформации и матрици	302
13.4. Детерминанти и следи	308
13.5. Собствени стойности и собствени вектори	311
13.6. Теория на представянията и алгебри на Ли	314
13.7. Тензорно представящо пространство; сводимост	319
13.8. Ортогонални групи	324
13.9. Унитарни групи	330
13.10. Симплектични групи	335
14. Математически анализ в многообразие	341
14.1. Диференциране в многообразие?	341
14.2. Успоредно пренасяне (транслация)	343
14.3. Ковариантна производна	347
14.4. Кривина и торзия	352
14.5. Геодезични линии, успоредници и кривина	354
14.6. Производна на Ли	360
14.7. Какво ни дава метриката?	368
14.8. Симплектични многообразия	372
15. Разслоения и калибровъчни свързаности	375
15.1. Физическа мотивация на идеята за разслоение	375
15.2. Математическото понятие за разслоение	378
15.3. Сечения на разслоения	382
15.4. Разслоение на Клифорд	385
15.5. Комплексни векторни разслоения и (ко)тангенциални разслоения	389
15.6. Проективни пространства	392
15.7. Нетривиалност при разслоена свързаност	398
15.8. Кривина на разслоение	401
16. Стълба към безкрайността	407
16.1. Крайни полета	407
16.2. Крайна или безкрайна геометрия е нужна на физиката?	409
16.3. Различен размер безкрайности	415
16.4. Диагоналният разрез на Кантор	419
16.5. Мистерии в основите на математиката	423
16.6. Машини на Тюринг и теорема на Гьодел	426
16.7. Колко голяма е физическата безкрайност?	431
17. Пространствовреме	435
17.1. Пространствовремето на Аристотеловата физика	435
17.2. Пространствовремето на галилеевата релятивистка динамика	438
17.3. Пространствовремето на нютонианската динамика	440
17.4. Принцип за еквивалентност	444
17.5. Картановото „нютонианско пространствовреме“	447

17.6. Фиксирана крайна скорост на светлината	453
17.7. Светлинни конуси	455
17.8. Краят на абсолютното време	458
17.9. Пространствотемето в Айнщайновата обща теория на относителността	463
18. Геометрия на Минковски	467
18.1. Четиримерни пространства на Евклид и Минковски	467
18.2. Групи на симетрия на пространството на Минковски	471
18.3. Лоренцова ортогоналност и „парадокс на часовника“	473
18.4. Хиперболична геометрия в пространство на Минковски	479
18.5. Небесната сфера като риманова сфера	485
18.6. Нютонова енергия и (ъглов) момент	489
18.7. Релятивистка енергия и импулс	492
19. Класическите полета на Максвел и Айнщайн	497
19.1. Отвѣд нютоновата динамика	497
19.2. Теорията на Максвел за електромагнетизма	499
19.3. Закони за запазване и потоци в теорията на Максвел	504
19.4. Максвеловото поле като калибровъчна кривина	506
19.5. Тензор на енергията и импулса	512
19.6. Айнщайновото уравнение на полето	516
19.7. Космологическа константа и тензор на Вайл	520
19.8. Енергия на гравитационното поле	523
20. Лагранжиани и хамилтониани	529
20.1. Вълшебният формализъм на Лагранж	529
20.2. Повече симетрия – подходът на Хамилтън	534
20.3. Малки осцилации	537
20.4. Хамилтоновата динамика като симплектична геометрия	542
20.5. Анализ на полета посредством лагранжиани	545
20.6. Защо лагранжианите са основен инструмент на съвременните физични теории?	548
21. Квантовата частица	553
21.1. Некомутиращи променливи	553
21.2. Квантови хамилтониани	556
21.3. Уравнение на Шрьодингер	559
21.4. Експериментални потвърждения на квантовата теория	561
21.5. Вълново-корпускулярият дуализъм	566
21.6. Какво е квантова „реалност“?	568
21.7. „Холистична“ природа на вълновата функция	573
21.8. Мистериозните „квантови скокове“	577
21.9. Вълнови функция и вероятностни разпределения	579
21.10. Позиционни състояния	582
21.11. Описание в импулсно пространство	584
22. Квантова алгебра, геометрия и спин	589
22.1. Квантовите процедури U и R	589
22.2. Линеиността на U и нелинеиността на R	592
22.3. Унитарна структура, Хилбертово пространство, Дираков запис	595
22.4. Унитарна еволюция: Шрьодингер и Хайзенберг	598

22.5. „Наблюдаемите“ величини в квантовата механика	602
22.6. Да/не измервания; проектори	606
22.7. Нулеви измервания; спиралност	608
22.8. Спин и спинори	614
22.9. Риманова сфера на системи с две състояния	619
22.10. Спин с по-висока размерност: представяне на Майорана	625
22.11. Сферични хармонични вълни	628
22.12. Релативистки квантов ъглов момент	633
22.13. Изолиран квантов обект: общият случай	637
23. Оплетеният квантов свят	643
23.1. Квантова механика на системи от много частици	643
23.2. Огромното пространство на състоянията на многочастични системи	645
23.3. Квантово сплитане; неравенства на Бел	648
23.4. АПР-експерименти по Бом	651
23.5. АПР-примерът на Харди: почти без никакви вероятности	656
23.6. Две от загадките на квантовото сплитане	657
23.7. Бозони и фермиони	660
23.8. Квантови състояния на бозоните и фермионите	663
23.9. Квантова телепортация	665
23.10. Квлитане	669
24. Електронът на Дирак и античастиците	677
24.1. Напрежение между квантовата теория и теорията на относителността	677
24.2. Защо античастиците имплицират наличието на квантови полета?	678
24.3. Положителни стойности на енергията в квантовата механика	680
24.4. Трудности с релативистката формула за енергията	683
24.5. Неинвариантността на $\partial/\partial t$	685
24.6. Коренуване на вълновия оператор по Клифорд-Дирак	687
24.7. Уравнение на Дирак	689
24.8. Пътят на Дирак към позитрона	691
25. Стандартен модел на физиката на елементарните частици	697
25.1. Произход на съвременната физика на елементарните частици	697
25.2. Зигзаговидният образ на електрона	699
25.3. Електрослаби взаимодействия; рефлексивна асиметрия	703
25.4. Зарядово спрягане, четност и инверсия на времето	710
25.5. Група на симетриите на електрослабите взаимодействия	712
25.6. Силно взаимодействащи частици	717
25.7. „Цветни“ кварки	721
25.8. Отвъд стандартния модел?	725
26. Квантова теория на полето	727
26.1. Фундаменталният статут на квантовата теория на полето	727
26.2. Оператори на раждане (креативни) и на унищожение (анихилативни)	729
26.3. Безкрайномерни алгебри	732
26.4. Античастици в КТП	735
26.5. Различни видове вакуум	737
26.6. Взаимодействия: лагранжиани и интегриране по траектории	738
26.7. Разходящи интеграла по траектории: отговорът на Файнман	744
26.8. Конструирание на Файнманови диаграми; S-матрица	746

26.9. Ренормиране	750
26.10. Диаграми на Файнман от лагранжиани	755
26.11. Диаграмите на Файнман и изборът на тип вакуум	756
27. Големият взрив и неговото термодинамично наследство	759
27.1. Времева симетрия в динамичната еволюция	759
27.2. Субмикроскопски ингредиенти	761
27.3. Ентропия	763
27.4. Устойчивост на понятието за ентропия	766
27.5. Извеждане – или не – на втория закон?	770
27.6. Изолирана система ли е вселената като цяло?	773
27.7. Ролята на Големия взрив	776
27.8. Черни дупки	782
27.9. Хоризонти на събитията и пространствено-времеви сингулярности	788
27.10. Ентропия на черна дупка	790
27.11. Космология	793
27.12. Конформни диаграми	800
27.13. Нашият извънредно специален Голям взрив	805
28. Спекулативни теории за ранната вселена	811
28.1. Спонтанно нарушаване на симетрията в ранната вселена	811
28.2. Космически топологични дефекти	816
28.3. Проблеми с нарушаването на симетрията в ранната вселена	820
28.4. Инфлационна космология	824
28.5. Валидни ли са основанията за приемането на инфлационния модел?	831
28.6. Антропният принцип	836
28.7. Специалният характер на Големия взрив: антропният ключ?	841
28.8. Хипотеза на Вайл за кривината	845
28.9. Идеята на Хартъл-Хокинг: „без граници“	849
28.10. Космологичните параметри: състояние на наблюденията?	852
29. Парадокс на измерването	861
29.1. Конвенционалните онтологии на квантовата теория	861
29.2. Неконвенционални онтологии за квантовата теория	865
29.3. Матрица на плътността	871
29.4. Матрица на плътността за спин $\frac{1}{2}$: сфера на Блох	874
29.5. Матрица на плътността в АПР-ситуации	878
29.6. Подход на квантовата декохеренция	883
29.7. Котката на Шрьодингер с „Копенхагенска“ онтология	885
29.8. Могат ли други конвенционални онтологии да разрешат „котешкия проблем“?	888
29.9. Кои неконвенционални онтологии биха могли да помогнат?	892
30. Роля на гравитацията в редуцията на квантовото състояние	895
30.1. Ще оцелее ли квантовата теория в познатия ни днес вид?	895
30.2. Данни, почерпени от космологичната асиметрия на времето	897
30.3. Времева асиметрия в редуцията на квантовото състояние	899
30.4. Температурата на черна дупка по Хокинг	904
30.5. Температура на черна дупка от комплексна периодичност	908
30.6. Вектори на Килинг, поток на енергията и ... пътуване във времето!	915
30.7. Извличане на енергия от орбити с отрицателна енергия	918

30.8. Хокингови експлозии	921
30.9. Един по-радикален подход	925
30.10. Буцата на Шрьодингер	930
30.11. Фундаментален конфликт с принципите на Айнщайн	933
30.12. Предпочитани състояния на Шрьодингер-Нютон?	938
30.13. FELIX и някои сродни идеи	940
30.14. Произход на флукуациите в ранната вселена	946
31. Суперсиметрия, допълнителни измерения и струни	953
31.1. Необяснените параметри	953
31.2. Суперсиметрия	957
31.3. Алгебра и геометрия на суперсиметрията	961
31.4. Пространствотворене с по-висока размерност	965
31.5. Оригиналната „адронна“ версия на струнната теория	969
31.6. Към една струнна теория на света	972
31.7. Струнна мотивация за въвеждането на допълнителни измерения	975
31.8. Струнната теория като квантова гравитация?	977
31.9. Струнна динамика	981
31.10. Защо не виждаме допълнителните пространствени измерения?	983
31.11. Трябва ли да приемем аргумента за квантовата стабилност?	988
31.12. Класическа нестабилност на допълнителни измерения	992
31.13. Финитна ли е струнната КТП?	995
31.14. Магическите пространства на Калаби-Яу; М-теория	997
31.15. Струните и ентропията на черна дупка	1004
31.16. „Холографският принцип“	1009
31.17. Перспективата на D-браните	1012
31.18. Физичен статус на струнната теория	1015
32. Тясната Айнщайнова пътека, примкови променливи	1019
32.1. Канонична квантова гравитация	1019
32.2. Хиралният принос в променливите на Ащекар	1021
32.3. Видът на променливите на Ащекар	1024
32.4. Примкови променливи	1027
32.5. Математика на възлите и връзките	1030
32.6. Спинови мрежи	1034
32.7. Какъв е статутът на примковата квантова гравитация?	1040
33. По-радикални подходи: теория на туистърите	1045
33.1. Теории с дискретна геометрия на някои от елементите	1045
33.2. Туистърите като светлинни лъчи	1050
33.3. Конформна група; компактифицирано пространство на Минковски	1056
33.4. Туистърите като спинори с по-висока размерност	1060
33.5. Основи на туистърната геометрия	1063
33.6. Геометрия на туистърите, разглеждани като безмасови частици със спин	1067
33.7. Квантовата теория и туистърите	1072
33.8. Туистърно описание на безмасови полета	1075
33.9. Туистърна снопова кохомология	1078
33.10. Туистърите и разделянето на положителни от отрицателни честоти	1084
33.11. Нелинейният гравитон	1086
33.12. Туистърите и общата теория на относителността	1092

33.13. Туистъррен подход в теорията на елементарните частици	1095
33.14. Бъдещето на теорията на туистъррите	1096
34. Откъде минава пътят към реалността?	1101
34.1. Великите теории на физиката през XX век ... и след това	1101
34.2. Математически мотивирана фундаментална физика	1105
34.3. Роля на модата във физиката	1108
34.4. Винаги ли можем да опровергаем експериментално една погрешна теория?	1112
34.5. Откъде ще дойде следващата революция във физиката?	1117
34.6. Какво е реалността?	1120
34.7. Роля на стиловете на мислене във физическата теория	1122
34.8. Нашият дълъг математически път към реалността	1126
34.9. Красота и чудеса	1131
34.10. Дълбоки отговори и още по-дълбоки въпроси	1137
Епилог	1141
Библиография	1143
Именен показалец	1171
Предметен показалец	1175

*Посвещавам тази книга на непрежалимия
ДЕНИС СИАМА,
който ми показва колко вълнуваща може да е физиката*

Предговор

ЗАДАЧАТА НА ТАЗИ КНИГА Е да даде на читателя известна представа за едно от най-важните и вълнуващи откривателски пътешествия, които човечеството е предприемало. Това е търсенето на фундаменталните принципи, управляващи случващото се във Вселената. Става дума за пътуване, което продължава над две и половина хилядолетия и затова не трябва да се изненадваме, че най-последно сме отбелязали съществен напредък. Въпреки това пътуването се оказва изключително трудно, а истинското разбиране в повечето случаи идва много бавно. Поради неизбежните затруднения често сме поемали в погрешна посока и това ни е научило да бъдем предпазливи. Все пак можем да кажем, че ХХ в. ни донесе изключителни нови прозрения, някои от които са толкова впечатляващи, че много днешни учени са убедени: вероятно най-последно сме се доближили до разбирането на *всички* фундаментални принципи на физиката. Сега, след като ХХ в. достигна своя завършек, аз ще се опитам да се придържам към по-умерен подход. Невинаги мнението ми ще бъде приветствано от „оптимистите“, макар да очаквам нови промени, дори още по-големи от онези, които настъпиха през изминалото столетие.

Читателят ще установи, че в тази книга не съм се стремил да избягвам използването на математически формули, въпреки злокобната перспектива това да доведе до съществено намаляване на нейната публика. Съвсем сериозно обмислих този въпрос и стигнах до извода, че онова, което искам да кажа, не може да бъде изразено без помощта на известно количество математически означения и без вникване в някои автентично математически идеи. Разбирането ни за принципите, които са в основата на феномените в нашия физически свят, зависи в известна степен от отношението ни към математическия език, който използваме за тяхното изразяване. За някои хора това може да бъде причина за отчаяние, особено ако в тях се е загнездила увереността, че нямат математическа дарба – дори когато става дума за най-елементарните раздели на тази наука. Те биха могли да се запитат как е възможно да вникнат в изследванията, провеждани в най-авангардните раздели на физическата теория, след като дори не могат да усвоят напълно смятането с *дробни*? Е, добре, признавам, че в случая наистина има проблем.

Въпреки това оставам оптимист, поне що се отнася до възможността за постигане на разбиране. Вероятно съм непоправим оптимист. Чудя се дали онези читатели, които не могат да смятат с дробни – или поне твърдят това – не се самозаблуждават поне малко, дали в действителност голяма част от тях нямат потенциал, който не осъзнават напълно. Без съмнение има хора, които, щом се изправят пред математическа формула, виждат само строгото лице на родител или учител, който се е опитвал да им натрапи една лишена от разбиране папагалска вещина – позовавайки се на задължението и само на него, без дори да им загатне за магията и красотата на математиката. Вероятно за някои е твърде късно, но както вече казах, аз съм оптимист и вярвам, че сред нас има много хора, дори сред онези, които така и не се усвоили смятането с дробни, които са способни да надзърнат в онзи прекрасен свят, който поне отчасти би трябвало да бъде напълно достъпен за тях.

Една от най-близките приятелки на майка ми в своята младост била сред хората, които така и не усвоили смятането с дробни числа. Веднъж тя сподели това с мен, след като беше прекратила успешната си кариера на балерина. Все още бях млад и не бях започнал сериозните си занимания с математика, но вече ме смятаха за човек, който умее да ѝ се наслаждава. „Така и не успях да усвоя цялото това съкращаване“, ми каза тя, макар да беше изисквана и изключително интелигентна жена и без съмнение да разполагаше с умствените възможности, необходими за вникването в сложната хореография на балета, които съвсем не са по-незначителни от онези, от които се нуждаем за решаването на дадена математическа задача. Ето защо силно надценявайки способността си да обяснявам, аз реших да опитам, също както и други преди мен, да ѝ помогна да вникне в елементарната и напълно логична процедура на „съкращаването“.

Смятам, че опитите ми са били също толкова неуспешни, колкото тези на другите преди мен. (Впрочем баща ѝ е изявен учен и член на Кралското общество, така че нейната социална среда би трябвало да благоприятства усвояването на научна информация. Вероятно „строгото изражение“ е оказало влияние в случая, макар да не мога да го твърдя със сигурност.) Разсъждавайки за това, днес се чудя дали както тя, така и много други като нея, не среща затруднение от чисто рационален характер – нещо, което съм пропуснал да забележа, увлечен от математическото си красноречие. В действителност налице е един дълбок въпрос, който изниква непрекъснато в математиката и математическата физика. На него се натъкваме за пръв път тъкмо по повод на наглед невинната операция на съкращаване на общия множител в числителя и знаменателя на обикновена числова дроб.

Онези, за които това действие се е превърнало във втора природа поради непрекъснатото му изпълняване, вероятно няма да възприемат лесно онази труд-

ност, която се крие във въпросната привидно елементарна процедура. Сигурно много от онези, които намират съкращаването за неразбираемо, всъщност виждат по-добре онова, което останалите, небрежно отминаващи го по пътя напред, изглежда са склонни да пренебрегват. Какъв обаче е този въпрос? Както ще видим, той засяга самия начин, по който математиците гарантират съществуването на обектите, с които боравят, а също това как същите тези обекти се съотнасят с физическата реалност.

Спомням си как по времето, когато ходех на училище (бях някъде на около 11 години) се почувствах объркан, когато учителят ни попита какво всъщност представлява дадена дроб (например $3/8$). Бяха изказани редица предположения, свързани с деленето на торта на парчета и други подобни, но те бяха отхвърлени от учителя поради (валидното) основание, че са свързани с редица неточно зададени ситуации в материалния свят, към които точното математическо понятие за дроб трябва да бъде *приложено*; следователно те не ни казват какво въпросното еднозначно зададено понятие в действителност е. Бяха изказани и други предположения, например че $3/8$ е „нещо с три отгоре, осем отдолу и хоризонтална черта по средата“. Бях силно изненадан от това, че учителят, изглежда, се отнасяше съвсем сериозно към предложения от този тип! Не помня точно как беше разрешен въпросът в крайна сметка, но, връщайки се към него ретроспективно и разполагайки с по-късния ми опит като студент по математика, предполагам, че учителят ни е направил смел опит да ни подсказже дефиницията за дроб, използваваща вездесъщото математическо понятие за *клас на еквивалентност*.

Какво обаче е това понятие и как то може да бъде отнесено към дробите така, че да ни даде отговор на въпроса какво в действителност представляват те? Нека започнем с предложението на моя съученик, според когото в случая става дума за „нещо с три отгоре и осем отдолу“. По същество това означава, че дробта може да бъде зададена чрез наредена двойка от цели числа, в случая числата 3 и 8. От друга страна, очевидно не можем да приемем, че дробта е такава наредена двойка, тъй като дробта $6/16$ например съвпада с дробта $3/8$, макар двойката (6, 16) очевидно да не съвпада с двойката (3, 8). В случая става дума тъкмо за съкращаване, тъй като можем да запишем $6/16$ като $3 \times 2 / 8 \times 2$ и след това, съкращавайки множителя 2 в горната и долната част на дробта, да получим $3/8$. Какво ни дава правото да направим това и по този начин да „отъждествим“ двойката (6, 16) с двойката (3, 8)? Отговорът на математика, който вероятно изглежда като начин за отклоняване на въпроса, се свежда до това, че правилото за съкращаване е вложено в дефиницията за дроб, тъй като според нея двойката цели числа $(a \times n, b \times n)$ представлява същата дроб като двойката (a, b) винаги когато n е различно от нула цяло число (в случая трябва да изключим също възможността b да бъде равно на нула).

Дори това не ни дава отговор на въпроса какво всъщност е дроб, а по-скоро ни подсказва как можем да представяме дробите. Какво тогава е дробта? От гледна точка на математическото понятие за „клас на еквивалентност“, дробта $3/8$ не е нищо повече от безкрайна съвкупност, включваща всички двойки

$$(3, 8), (-3, -8), (6, 16), (-6, -16), (9, 24), (-9, -24), (12, 32), \dots,$$

като всяка двойка може да бъде получена от всяка друга в списъка посредством определен брой приложения на правилото за съкращаване, за което стана дума по-горе¹. При това положение ще са ни нужни също дефиниции, показващи как да събираме, изваждаме и умножаваме такива безкрайни съвкупности от двойки цели числа, удовлетворяващи обичайните правила на алгебрата, а също и указания как да разглеждаме самите цели числа като определен тип дробни.

Тази дефиниция ни дава всичко, от което имаме нужда, за да боравим математически с дробите (от нея следва например, че $1/2$ е такова число, което, прибавено към себе си, дава единица и т.н.), а операцията на съкращаване на свой ред е, както вече видяхме, вградена във въпросната дефиниция. Въпреки това тя изглежда твърде формална и затова можем да се запитаме дали наистина отговаря на интуитивното ни понятие за дроб. Макар вездесъщата процедура за формиране на класове на еквивалентност, която беше илюстрирана посредством горния пример, да е изключително мощен, чисто математически инструмент за установяване на непротиворечивост и математическо съществуване, тя ни дава доста странни на вид обекти. Освен това тя едва ли предава правдиво интуитивното ни разбиране, например за дробта $3/8$! Ето защо не е изненадващо, че приятелката на майка ми се е почувствала смутена от нея.

В предложените тук описания на различни математически понятия ще се опитам да избягвам, доколкото е възможно, онзи математически педантизъм, който ни кара да въвеждаме дробите чрез „безкрайни класове от наредени двойки“, макар това да има смисъл от гледна точка на строгостта и точността. Тук за мен е по-важно това да предам идеята – а също красотата и магията, – която се съдържа в много от важните математически понятия. Идеята за дроб от рода на $3/8$ препраща просто към определен тип обект, който, събран 8 пъти със самия себе си, дава 3. Магията е в това, че идеята за дроб всъщност върши работа, макар в материалния свят да нямаме пряк опит с неща, които могат с точност да се измерват чрез дробни – парчетата торта не са нищо повече от удобно приближение. (Не е такъв случаят с естествените числа като 1, 2 и 3, които с точност характеризират количествено различни обекти, за които имаме непосредствен опит.) Един от на-

¹ Говорим за „клас на еквивалентност“, тъй като в случая имаме клас от обекти (тук това са двойки цели числа), всеки от елементите на който се разглежда като еквивалентен в определен смисъл на всеки от останалите му елементи.

чините да се убедим, че дробите могат да бъдат използвани непротиворечиво, е като използваме „дефиницията“ посредством безкрайни съвкупности от двойки цели числа, за която стана дума по-горе. От това обаче не следва, че дробта $3/8$ в действителност е такава съвкупност. По-добре е да мислим за $3/8$ като обект, съществуващ сам по себе си (в някакъв Платонов свят), а за безкрайните съвкупности от двойки числа – като за един от възможните начини да се уверим в непротиворечивостта на обекти от този вид. След като постепенно свикнем с тях, започваме да вярваме, че лесно можем да мислим обекти от рода на дробта $3/8$ като съществуващи сами по себе си, с което идеята за „безкрайната съвкупност от двойки числа“ започва да изглежда като педантичен похват, който много бързо губи връзката си с въображението ни, след като вече сме усвоили съответното понятие. В голяма част от математиката нещата стоят точно така.

За математиците (или поне за повечето от тях, доколкото съм в състояние да преценя) математиката не е просто културно-обусловена дейност, въведена от самите нас – тя има свой собствен живот, голяма част от който е в удивителна хармония с материалния свят. Не можем да вникнем в законите, които управляват физическия свят, без да навлезем в света на математиката. В частност понятието за клас на еквивалентност има пряко отношение не само към различни важни (макар и объркващи) математически понятия, а също и към различни важни (макар и объркващи) физически теории, например общата теория на относителността на Айнщайн и принципите на „калибровъчната теория“, които характеризират взаимодействията в природата от гледна точка на съвременната физика на елементарните частици. В днешната физика е невъзможно да избегнем онези тънкости, които съпътстват употребата на сложни математически техники. По тази причина първите 16 глави в настоящата книга са посветени преди всичко на изложението на различни математически идеи.

Какъв съвет бих могъл да предложа на читателя, който да му помогне да премине по този нелек път? Има четири различни нива, на които може да бъде четена настоящата книга. В едната крайност попадат читателите, които просто прелистват на следващата страница всеки път, щом зърнат математическа формула (някои читатели от този тип вероятно срещат трудности с дробите). Дори и да сте един от тях, все пак вярвам, че можете да имате полза от четенето на книгата, като просто прескачате формулите и четете словесното изложение. Предполагам, че общо взето по същия начин и аз съм преглеждал разхвърляните из дома ми списания по шахмат, когато бях малък. Шахматът имаше значително място в живота на моите родители и на братята ми, но той не беше интереса ми, макар да се наслаждавах, когато четях за подвизите на онези изключителни, но често странни персонажи, посветили живота си на тази игра. Четейки за блестящите им ходове, аз извличах някаква полза, макар да не ги разбирах и да не полагах усилия да раз-

гадая записа на различните позиции. Въпреки всичко за мен това беше приятна и интересна дейност, която привличаше вниманието ми. Ето защо се надявам, че математическото изложение, което предлагам тук, може да породи интерес дори сред напълно незаинтересовани от математиката читатели, стига те, водени от своите смелост и любопитство, да дръзнат да се включат в търсенето на математическите и физическите идеи, които вероятно са положени в основата на материалния свят. Не се притеснявайте да прескачате уравненията (самият аз често го правя), а дори и цели глави или части от книгата, ако те според вас посвещават прекалено много внимание на маловажни въпроси! Трудността на изложението и употребата на формули варират силно в различните части от книгата, затова може би другаде ще откриете нещо, което да ви хареса повече. Можете просто да преглеждате и прелиствате. Надявам се, че честите препратки ще ви позволят да се ориентирате в използваните понятия и означения, като при нужда се връщате към непрочетени преди това раздели.

На второ ниво се намират онези читатели, които са готови да обърнат внимание на математическите формули, когато се натъкнат на тях, но може би нямат склонност (или пък време) сами да проверяват твърденията ми. Решенията на упражненията, пръснати из по-математически ориентирани части на книгата, показват истинността на голяма част от тези твърдения. Различните степени на трудност са отбелязани посредством следните картинки:



Давайте смело напред!



Изисква известен размисъл.



Не подхождайте лекомислено.

От друга страна, съвсем уместно е да приемете на доверие изказаните твърдения. Бихте могли успешно да следвате изложението дори и да изберете тази стратегия.

Ако желаете да вникнете в тези различни (и същевременно важни) математически понятия, макар да не сте запознати с излаганите от мен идеи, то се надявам, че решаването на задачите ще ви бъде от полза. В математиката винаги дори и малкото пряк опит в самостоятелното обмисляне на нещата може да осигури много по-задълбочено разбиране, отколкото бихте получили, ако просто четете информация по тези въпроси. (Ако ви интересуват отговорите на упражненията, можете да посетите www.roadsolutions.ox.ac.uk.)

Накрая, възможно е да сте специалист в областта. В такъв случай няма да имате проблеми с математиката (по-голямата част от която ще ви бъде добре позната) и поради това вероятно няма да искате да губите време с упражненията.

Въпреки това можехте да установите, че има какво да научите от моя подход към различни теми, обсъдени тук по начин, който понякога се отличава от обичайния (или дори се разминава съществено с него). Може би ще ви бъде интересно да се запознаете с мнението ми за различни съвременни теории (например теорията на суперсиметрията, разширяването на вселената, природата на Големия взрив, черните дупки, струнната теория и М-теорията, „примковите“ променливи в квантовата теория на гравитацията, туистърите и дори за основите на квантовата теория). Без съмнение, по много от тези въпроси няма да можете да се съгласите с мен. От друга страна, споровете са важна част от развитието на науката, поради което не се притеснявам да защитавам възгледи, които отчасти се отклоняват от възприетата практика на съвременната теоретична физика.

Може да се каже, че истинският предмет на тази книга е отношението между математиката и физиката, както и това как взаимодействието между тях оказва влияние върху търсенето ни на по-добра теория на вселената. В много от съвременните теоретични развития съществен мотив е преценката за математическа красота, дълбочина и изтънченост. Ясно е, че този тип влияния от страна на математиката могат да имат решаващо значение, както показват някои от най-впечатляващите постижения на физиката през ХХ в.: уравнението на Дирак за електрона, общата теоретична рамка на квантовата механика и общата теория на относителността на Айнщайн. Все пак във всеки един от тези случаи физическите съображения, свързани в крайна сметка с наблюдателните данни, осигуряват решаващите критерии за тяхната допустимост. От друга страна, при много от съвременните идеи, които целят из основи да преобърнат разбирането ни за законите на Вселената, липсват адекватни физични критерии – т.е. експериментални данни, или дори принципна възможност за експериментална проверка. Ето защо можем да се запитаме дали наличните математически изисквания са достатъчна основа за оценка на потенциала на тези идеи. Макар това да е деликатен въпрос, тук ще обсъдя редица негови аспекти, които според мен не се достатъчно обсъдени в литературата.

Въпреки че на места ще представя идеи, които вероятно изглеждат съмнителни, ще се стремя винаги да показвам ясно на читателя кога съм си позволил такава фриволност. Съответно тази книга наистина може да бъде използвана като ръководство към основните идеи (а и към чудесата) на съвременната физика. Тя може да бъде използвана за целите на обучението като въведение в съвременната физика – по начина, по който я разбираме в началото на третото хилядолетие.